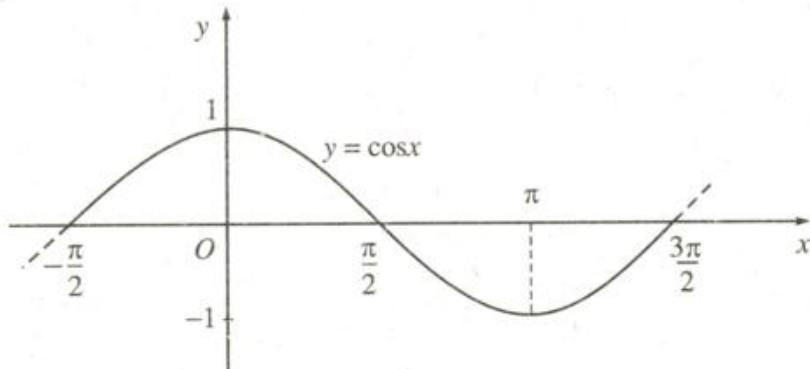


SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

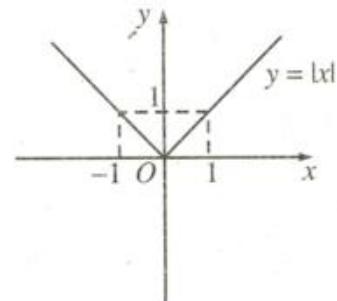
I – TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



Từ đồ thị (H.1, H.2) hãy chỉ ra các khoảng tăng, giảm của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ và của hàm số $y = |x|$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.



Hình 1



Hình 2

1. Nhắc lại định nghĩa

Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K . Ta nói

Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** (tăng) trên K nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc K mà x_1 nhỏ hơn x_2 thì $f(x_1)$ nhỏ hơn $f(x_2)$, tức là

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** (giảm) trên K nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc K mà x_1 nhỏ hơn x_2 thì $f(x_1)$ lớn hơn $f(x_2)$, tức là

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là hàm số **đơn điệu** trên K .

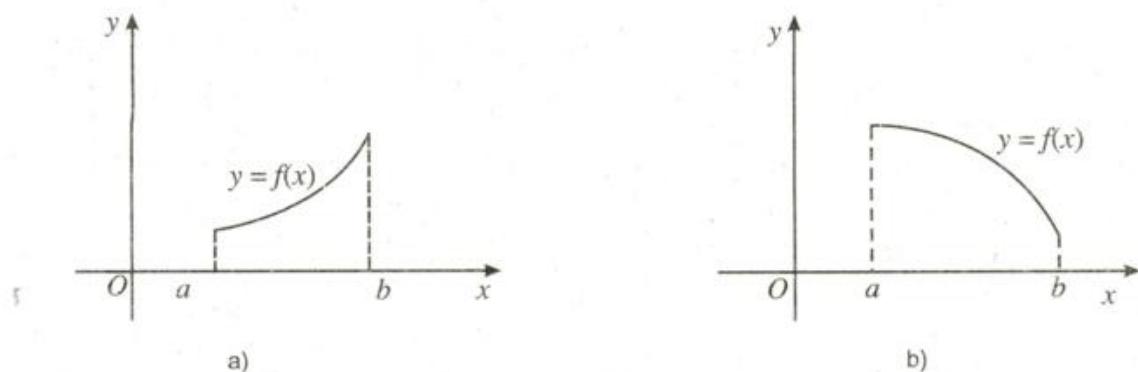
NHẬN XÉT. Từ định nghĩa trên ta thấy

a) $f(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0, \forall x_1, x_2 \in K$
 $(x_1 \neq x_2)$;

$f(x)$ nghịch biến trên $K \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0, \forall x_1, x_2 \in K$
 $(x_1 \neq x_2)$.

b) Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị *đi lên* từ trái sang phải (H.3a) ;

Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị *đi xuống* từ trái sang phải (H.3b).



Hình 3

2. Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm



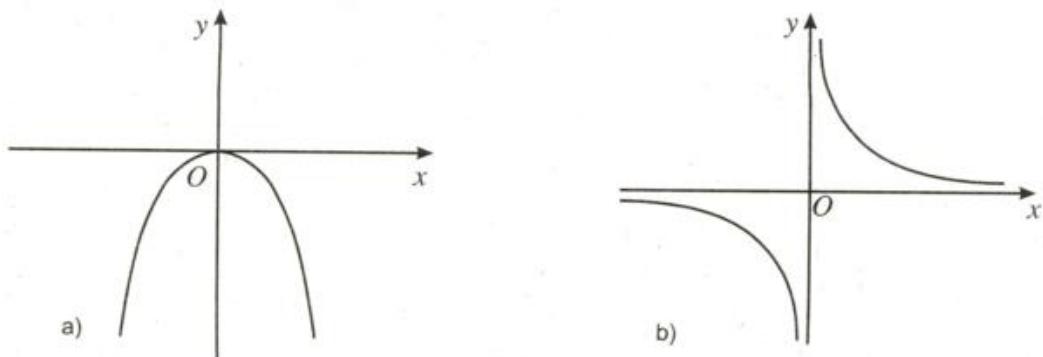
Xét các hàm số sau và đồ thị của chúng :

a) $y = -\frac{x^2}{2}$ (H.4a)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-		
y	$-\infty$	0	$-\infty$

b) $y = \frac{1}{x}$ (H.4b)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-		
y	0	$-\infty$	$+\infty$



Hình 4

Xét dấu đạo hàm của mỗi hàm số và điền vào bảng tương ứng.

Từ đó hãy nêu nhận xét về mối quan hệ giữa sự đồng biến, nghịch biến của hàm số và dấu của đạo hàm.

Ta thừa nhận định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .

b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .

Tóm lại, trên K

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến} \\ f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ nghịch biến.} \end{cases}$$

CHÚ Ý

Nếu $f'(x) = 0$, $\forall x \in K$ thì $f(x)$ không đổi trên K .

Ví dụ 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số:

- a) $y = 2x^4 + 1$; b) $y = \sin x$ trên khoảng $(0 : 2\pi)$.

Giải

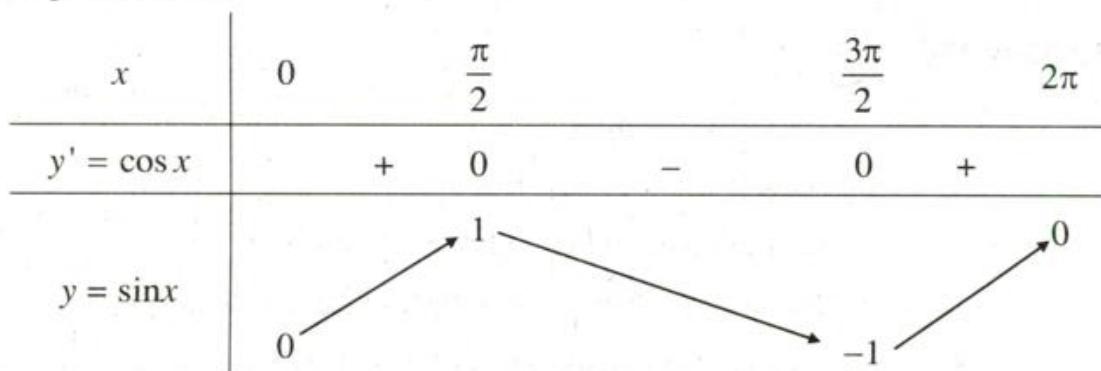
a) Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 8x^3$. Bảng biến thiên

Vậy hàm số $y = 2x^4 + 1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$, đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

b) Xét trên khoảng $(0; 2\pi)$, ta có $y' = \cos x$.

Bảng biến thiên



Vậy hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên các khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$,

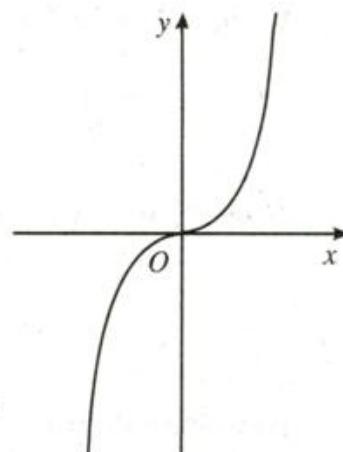
nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.



Khẳng định ngược lại với định lí trên có đúng không ?

Nói cách khác, nếu hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K thì đạo hàm của nó có nhất thiết phải dương (âm) trên đó hay không ?

Chẳng hạn, xét hàm số $y = x^3$ có đồ thị trên Hình 5.



Hình 5

CHÚ Ý

Ta có định lí mở rộng sau đây.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K . Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K .

Ví dụ 2. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = 2x^3 + 6x^2 + 6x - 7$.

Giải. Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 + 12x + 6 = 6(x + 1)^2$.

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và $y' > 0$ với mọi $x \neq -1$.

Theo định lí mở rộng, hàm số đã cho luôn luôn đồng biến.

II – QUY TẮC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Quy tắc

1. Tìm tập xác định.
2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
4. Nhận kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

2. Áp dụng

Ví dụ 3. Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2.$$

Giải. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$y' = x^2 - x - 2, \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0
y	$-\infty$	$\frac{19}{6}$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(2 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1 ; 2)$.

Ví dụ 4. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$.

Giai. Hàm số xác định với mọi $x \neq -1$. Ta có

$$y' = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

y' không xác định tại $x = -1$.

Bảng biến thiên

x	y'
$-\infty$	+
-1	
$+\infty$	+

Graph of y vs x :

- As $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow 1$.
- As $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow -\infty$.
- As $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 1$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(-1 ; +\infty)$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng $x > \sin x$ trên khoảng $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng cách xét khoảng đơn điệu của hàm số $f(x) = x - \sin x$.

Giải. Xét hàm số $f(x) = x - \sin x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$), ta có

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ ($f'(x) = 0$ chỉ tại $x = 0$) nên theo chú ý trên ta có $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó, với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ta có $f(x) = x - \sin x > f(0) = 0$

hay $x > \sin x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài tập

- #### 1. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số :

a) $y = 4 + 3x - x^2$; b) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 2$;

c) $y \equiv x^4 - 2x^2 + 3$; d) $y \equiv -x^3 + x^2 - 5$.

2. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số :

a) $y = \frac{3x+1}{1-x}$;

b) $y = \frac{x^2-2x}{1-x}$;

c) $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$;

d) $y = \frac{2x}{x^2 - 9}$.

3. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$; nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

4. Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

5. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\tan x > x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\tan x > x + \frac{x^3}{3} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

BÀI ĐỌC THÊM



TÍNH CHẤT ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Điều kiện đủ về tính chất đơn điệu của hàm số được chứng minh dựa vào định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ LA-GRĂNG

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ thì tồn tại một điểm $c \in (a; b)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

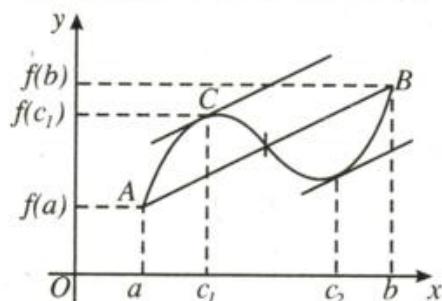
hay

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Minh họa hình học :

Nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn các giả thiết của định lí La-grăng thì trên đồ thị tồn tại điểm C mà tiếp tuyến tại đó song song hoặc trùng với dây cung AB (H. 6).

Hình 6



HỆ QUẢ

Nếu $F'(x) = 0$ với mọi x thuộc khoảng $(a ; b)$ thì $F(x)$ bằng hằng số trên khoảng đó.

Chứng minh. Xét điểm cố định $x_0 \in (a ; b)$. Với mỗi $x \in (a ; b)$ mà $x \neq x_0$, các giả thiết của định lí La-grăng được thoả mãn trên đoạn $[x_0 ; x]$ (hoặc $[x ; x_0]$). Do đó tồn tại điểm $c \in (x_0 ; x)$ (hoặc $c \in (x ; x_0)$) sao cho $F(x) - F(x_0) = F'(c)(x - x_0)$. Vì $c \in (a ; b)$ nên $F'(c) = 0$. Vậy

$$F(x) - F(x_0) = 0 \text{ hay } F(x) = F(x_0) = \text{const}$$

trên toàn khoảng $(a ; b)$. ■

ĐỊNH LÍ

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$.

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a ; b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng đó;
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a ; b)$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

Chứng minh. Lấy hai điểm bất kì x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) trên khoảng $(a ; b)$. Vì $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$ nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[x_1 ; x_2]$ và có đạo hàm trên khoảng $(x_1 ; x_2)$.

Theo định lí La-grăng, tồn tại một điểm $c \in (x_1 ; x_2) \subset (a ; b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Từ đó suy ra :

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a ; b)$ thì $f'(c) > 0$ nên $f(x_2) > f(x_1)$. Do đó, $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a ; b)$.
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a ; b)$ thì $f'(c) < 0$ nên $f(x_2) < f(x_1)$. Do đó, $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a ; b)$. ■

BẠN CÓ BIẾT



LA-GRĂNG (J.L. LAGRANGE)



La-grăng là nhà toán học Pháp, xuất thân trong một gia đình giàu có, nhưng trở nên khinh kiệt khi ông tưởng như sắp được thừa kế gia sản. Tuy nhiên, về sau ông xem tai họa này là một điều may mắn.

J.L. Lagrange
(1736 – 1813)

Ông nói : "Nếu được thừa kế một tài sản thì chắc là tôi không dành đời mình cho toán học".

Ông nội La-grăng là người Pháp, bà nội là người I-ta-li-a. Cả gia đình ông định cư ở Tu-rin (thủ phủ của xứ Pi-ê-mông (Piémont) thuộc I-ta-li-a).

La-grăng được cử làm giáo sư toán học ở Trường Pháo binh Hoàng gia Tu-rin năm 19 tuổi. Tất cả các học trò đều lớn tuổi hơn ông. Cùng với những học trò ưu tú của mình, La-grăng đã lập ra Hội nghiên cứu, tiền thân của Viện Hàn lâm khoa học Tu-rin. Tập báo cáo đầu tiên của Hội xuất hiện năm 1759 khi ông 23 tuổi. Phần lớn những công trình tốt nhất công bố trong tập san đầu này là của La-grăng, dưới nhiều bút danh khác nhau.

Ở tuổi 23, La-grăng được coi là nhà toán học ngang hàng với những nhà toán học lớn nhất thời bấy giờ là O-le (Euler) và các nhà toán học họ Béc-nu-li (Bernoulli).

Theo lời giới thiệu của O-le, ngày 2-10-1760, khi mới 24 tuổi, La-grăng được bầu làm Viện sĩ nước ngoài của Viện Hàn lâm khoa học Bec-lin. Về sau, O-le và Đa-lăm-be (d'Alembert) còn vận động vua nước Phổ mời La-grăng sang Béc-lin làm nhà toán học của Triều đình.

Năm 1764, lúc 28 tuổi, La-grăng được giải thưởng lớn về bài toán bình động của Mặt Trăng (là bài toán lí giải vì sao khi chuyển động, Mặt Trăng luôn luôn quay một mặt về phía Trái Đất).

Các năm 1766, 1772, La-grăng liên tiếp nhận được các giải thưởng của Viện Hàn lâm khoa học Pa-ri về các bài toán 6 vật thể, 3 vật thể.

Ngày 6-11-1776, La-grăng được vua nước Phổ - "vị vua lớn nhất châu Âu" - đón tiếp nồng nhiệt và được cử làm Giám đốc Ban Toán Lý của Viện Hàn lâm Bec-lin.

Năm 1787, Hoàng gia và Viện Hàn lâm Pa-ri đón tiếp nồng hậu nhà toán học lớn La-grăng trở về và cấp cho ông một căn hộ đầy đủ tiện nghi trong điện Lu-vrơ (Louvre, nay là viện bảo tàng lớn ở Pa-ri).

Năm 1788, ở tuổi 52, ông công bố kiệt tác của đời ông, bộ "Cơ học giải tích", để tài mà ông ấp ủ từ lúc 19 tuổi.

Nhờ sự can thiệp của La-grăng, người ta đã không thừa nhận 12 thay cho 10 để làm cơ số cho mét hệ.

Ông lập gia đình hai lần. Bà vợ đầu mất sớm vì đau yếu. Ở tuổi ngoài 50, La-grăng sống cô đơn, sầu muộn. Năm 56 tuổi, ông được một thiếu nữ, con gái bạn ông là nhà thiên văn học Lô-mô-ni-ê (Lemonier), yêu và ngỏ lời muốn kết hôn với ông. La-grăng nhận lời. Cô đã dành cả cuộc đời trẻ trung, tươi đẹp của mình để chăm sóc ông, kéo ông ra khỏi u sầu, thức tỉnh nơi ông lòng ham sống. Ông yêu tha thiết và cảm thấy khổ sở mỗi khi phải tạm xa bà. Ông khẳng định rằng bà vợ trẻ dịu dàng, tận tụy là giải thưởng quý báu nhất trong mọi giải thưởng của đời ông.

La-grăng được toàn thể nhân dân Pháp tôn vinh. Có lần, Ta-lê-grăng (Tallegrand), một vị tướng, đã nói với cha của La-grăng : "Con ông, người con của nhân dân Pháp, sinh ra ở Pi-ê-mông, đã làm vinh dự cho toàn thể nhân loại bởi thiên tài của mình".

La-grăng mất ngày 10-4-1813, thọ 77 tuổi.