§2 TÍCH PHÂN

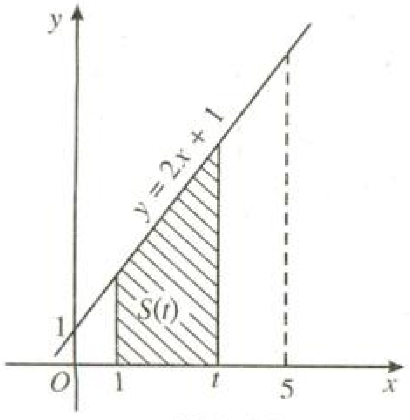
I - KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

1. Diện tích hình thang cong

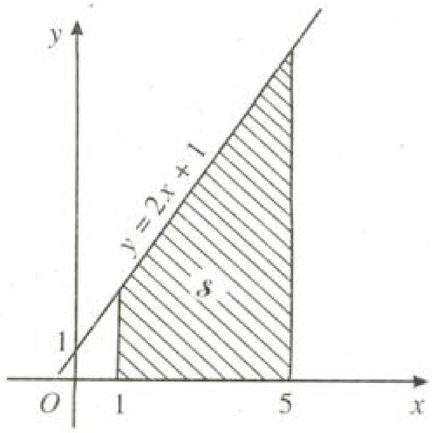
1

Kí hiệu T là hình thang vuông giới hạn bởi đường thẳng $y = 2x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = t$ $(1 \leq t \leq 5)$ (H.45).

1. Tính diện tích $\mathcal{S}$ của hình T khi $t = 5$ (H.46).
2. Tính diện tích $S(t)$ của hình T khi $t \in [1 ; 5]$.



Hình 45

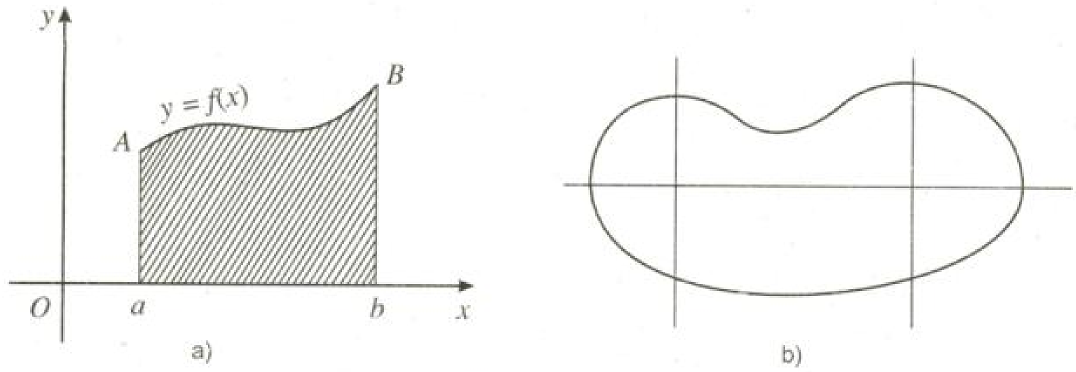


Hình 46

3. Chứng minh rằng $S(t)$ là một nguyên hàm của $f(t) = 2t + 1$, $t \in [1 ; 5]$ và diện tích $\mathcal{S} = S(5) - S(1)$.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không đổi dấu trên đoạn $[a ; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được gọi là **hình thang cong** (H. 47a).

Ở lớp dưới, ta đã biết cách tính diện tích hình chữ nhật, hình tam giác. Bây giờ, ta xét bài toán tính diện tích hình phẳng D giới hạn bởi một đường cong kín bất kì (H. 47b).

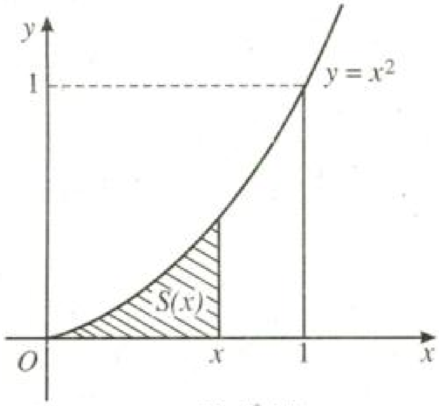


Hình 47

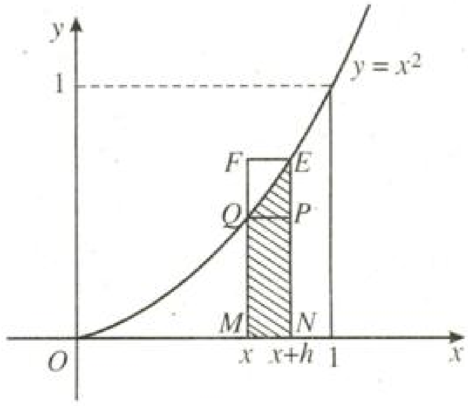
Bằng cách kẻ các đường thẳng song song với các trục toạ độ, ta chia D thành những hình nhỏ là những hình thang cong (H.47a). Bài toán trên được đưa về tính diện tích của hình thang cong.

Ví dụ 1. Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường cong $y = x^2$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$.

Giải. Với mỗi $x \in [0 ; 1]$ gọi $S(x)$ là diện tích của phần hình thang cong đã cho nằm giữa hai đường thẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ 0 và x (H. 48).



Hình 48



Hình 49

Ta chứng minh

$$S'(x) = x^2, x \in [0;1].$$

Thật vậy, với $h > 0$, $x + h < 1$, kí hiệu S_{MNPQ} và S_{MNEF} lần lượt là diện tích các hình chữ nhật $MNPQ$ và $MNEF$ (H.49), ta có

$$S_{MNPQ} \leq S(x+h) - S(x) \leq S_{MNEF}$$

hay

$$hx^2 \leq S(x+h) - S(x) \leq h(x+h)^2.$$

Vậy

$$0 \leq \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - x^2 \leq 2xh + h^2.$$

Với $h < 0$, $x + h > 0$, tính toán tương tự, ta được

$$2xh + h^2 \leq \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - x^2 \leq 0.$$

Tóm lại với mọi $h \neq 0$, ta có

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - x^2 \right| \leq 2x|h| + h^2.$$

Suy ra

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = x^2,\ x \in (0;1).$$

Ta cũng chứng minh được $S'(0) = 0$, $S'(1) = 1$.

Do đó, $S(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ trên đoạn $[0;1]$.

Mặt khác trên đoạn đó, $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ cũng là một nguyên hàm của $f(x) = x^2$ nên

$$S(x) = \frac{x^3}{3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Từ giả thiết $S(0) = 0$, suy ra $C = 0$. Vậy

$$S(x) = \frac{x^3}{3}.$$

Thay $x = 1$ vào đẳng thức trên, ta có diện tích của hình cần tìm là $S(1) = \dfrac{1}{3}$.

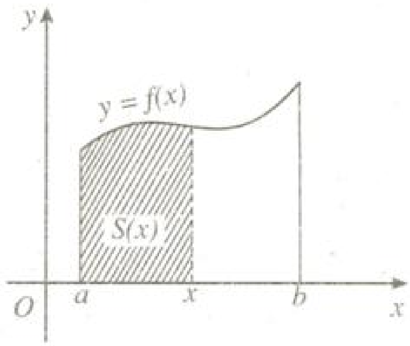
Bây giờ, ta xét bài toán tìm diện tích hình thang cong bất kì.

Cho hình thang cong giới hạn bởi các đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, trục hoành và đường cong $y = f(x)$, trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục, không âm trên đoạn $[a\ ;\ b]$.

Với mỗi $x \in [a\ ;\ b]$, kí hiệu $S(x)$ là diện tích của phần hình thang cong đó nằm giữa hai đường thẳng vuông góc với Ox lần lượt tại a và x (H.50).

Ta cũng chứng minh được $S(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a\ ;\ b]$.

Giả sử $F(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ thì có một hằng số C sao cho $S(x) = F(x) + C$.



Hình 50

Vì $S(a) = 0$ nên $F(a) + C = 0$ hay $C = -F(a)$.

Vậy $S(x) = F(x) - F(a)$.

Thay $x = b$ vào đẳng thức trên, ta có diện tích của hình thang cần tìm là

$$S(b) = F(b) - F(a).$$

2. Định nghĩa tích phân

2

Giả sử $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$, $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$. Chứng minh rằng $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$, (tức là hiệu số $F(b) - F(a)$ không phụ thuộc việc chọn nguyên hàm).

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a\ ;\ b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là **tích phân** từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a\ ;\ b]$) của hàm số $f(x)$, kí hiệu là

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Ta còn dùng kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$.

Vậy $$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$

Ta gọi $\int_a^b$ là *dấu tích phân*, a là *cận dưới*, b là *cận trên*, $f(x)\mathrm{d}x$ là *biểu thức dưới dấu tích phân* và $f(x)$ là *hàm số dưới dấu tích phân*.

CHÚ Ý

Trong trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0\ ;\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Ví dụ 2

1) $\int_1^2 2x\mathrm{d}x = x^2\Big|_1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3\ ;$

2) $\int_1^e \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln t\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$

NHẬN XÉT

a) Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hay $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến số x hay t.

b) *Ý nghĩa hình học của tích phân*. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a\,;\,b]$, thì tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (H.47a). Vậy

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.}$$

II – TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

TÍNH CHẤT 1

$$\boxed{\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x} \qquad (k \text{ là hằng số}).$$

TÍNH CHẤT 2

$$\boxed{\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.}$$

3

Hãy chứng minh các tính chất 1 và 2.

Ví dụ 3. Tính $\int_1^4 (x^2 + 3\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

Giải. Ta có

$$\int_1^4 (x^2 + 3\sqrt{x})\mathrm{d}x = \int_1^4 x^2\mathrm{d}x + 3\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^4 + 3\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{4^3 - 1}{3} + 2(2^3 - 1) = 35.$$

TÍNH CHẤT 3

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x} \qquad (a < c < b).$$

Chứng minh. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a\,;\,b]$. Khi đó, $F(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên mỗi đoạn $[a\,;\,c]$ và $[c\,;\,b]$. Do đó, ta có

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c))$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Ví dụ 4. Tính $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

Giải. Ta có

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x.$$

Vì $|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \text{nếu } 0 \le x \le \pi \\ -\sin x, & \text{nếu } \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$

nên

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\left(\int_0^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[(-\cos x)\Big|_0^{\pi} + (\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = 4\sqrt{2}.$$

III – PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến số

4

Cho tích phân $I = \int_0^1 (2x+1)^2 \mathrm{d}x$.

1. Tính I bằng cách khai triển $(2x+1)^2$.
2. Đặt $u = 2x+1$. Biến đổi biểu thức $(2x+1)^2 \mathrm{d}x$ thành $g(u)\mathrm{d}u$.
3. Tính $\int_{u(0)}^{u(1)} g(u)\mathrm{d}u$ và so sánh kết quả với I trong câu 1.

Tương tự phương pháp đổi biến số trong việc tính nguyên hàm, ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ,\ b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha\ ;\ \beta\ ]$(*) sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \le \varphi(t) \le b$ với mọi $t \in [\alpha\ ;\ \beta]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Ví dụ 5. Tính $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $x = \tan t,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Ta có $x'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$.

Khi $x = 0$ thì $t = 0$, khi $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Các giả thiết của định lí trên được thoả mãn. Do đó

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

(*) Nếu $\beta < \alpha$, ta xét đoạn $[\beta\ ;\ \alpha]$.

CHÚ Ý

Trong nhiều trường hợp ta còn sử dụng phép đổi biến số ở dạng sau :

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Để tính $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$,

đôi khi ta chọn hàm số $u = u(x)$ làm biến số mới, trong đó trên đoạn $[a\ ;\ b]$, $u(x)$ có đạo hàm liên tục và $u(x) \in [\alpha\ ;\ \beta]$.

Giả sử có thể viết

$$f(x) = g(u(x))u'(x), x \in [a; b],$$

với $g(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha\ ;\ \beta]$.

Khi đó, ta có

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{u(a)}^{u(b)} g(u)\mathrm{d}u.$$

Ví dụ 6. Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $u = \sin x$. Ta có $u' = \cos x$.

Khi $x = 0$ thì $u(0) = 0$, khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Vậy

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 u^2 \mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 7. Tính $\int\limits_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $u = 1 + x^2$, ta có $u' = 2x$, $u(0) = 1$, $u(1) = 2$ nên

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{1}{u^3}\mathrm{d}u = -\frac{1}{4}.\frac{1}{u^2}\Big|_1^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^2} - 1\right) = \frac{3}{16}.$$

2. Phương pháp tính tích phân từng phần

5

a) Hãy tính $\int (x+1)e^x \mathrm{d}x$ bằng phương pháp tính nguyên hàm từng phần.

b) Từ đó tính $\int_0^1 (x+1)e^x \mathrm{d}x$.

Tương tự phương pháp tính nguyên hàm từng phần, ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

hay $$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

Ví dụ 8. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $u = x$ và $\mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ và $v = -\cos x$. Do đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x = (-x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= (-x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1.$$

Ví dụ 9. Tính $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $u = \ln x$ và $dv = \frac{1}{x^2}dx$, ta có $du = \frac{1}{x}dx$ và $v = -\frac{1}{x}$. Do đó

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\ln x\right)\Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^e$$

$$= \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) - (0 - 1) = 1 - \frac{2}{e}.$$

BẠN CÓ BIẾT

NIU-TƠN (I.NEWTON)

I. Newton
(1643 – 1727)

Niu-tơn là nhà toán học, vật lí học, cơ học và thiên văn học vĩ đại người Anh.

Sinh ra thiếu tháng, Niu-tơn là một đứa trẻ yếu ớt. Lớn lên Niu-tơn cũng không phải là một cậu bé khoẻ mạnh. Cậu thường phải tránh những trò chơi hiếu động của đám bạn bè cùng lứa tuổi. Thay vào đó, cậu tự sáng chế ra những trò chơi cho riêng mình, qua đó cũng thấy được tài năng thực nghiệm của Niu-tơn sớm được bộc lộ. Khi thì cậu làm ra những đồ chơi cơ học, như chiếc đồng hồ bằng gỗ chạy được, khi thì cậu sáng chế ra chiếc cối xay gió, bên trong để một con chuột đóng vai trò người thợ xay. Có lần vào ban đêm Niu-tơn đã thả chiếc diều mang đèn lồng chiếu sáng, khiến cho dân làng hoảng sợ. Và ngay từ lúc nhỏ, Niu-tơn đã rất chịu khó đọc sách và ghi chép cẩn thận những điều lí thú mà cậu đọc được trong sách.

Năm 1661, 18 tuổi, Niu-tơn vào học tại trường Đại học Cam-brit (Cambridge). Từ đó Niu-tơn thực sự quan tâm đến khoa học. Thầy dạy toán của Niu-tơn thừa nhận cậu sinh viên xuất sắc đã vượt mình và năm 1669 ông nhường chức vụ giáo sư cho người học trò lỗi lạc ấy. Niu-tơn giữ chức này cho đến năm 1701.

Cống hiến lớn lao của Niu-tơn đối với toán học là đồng thời và độc lập với Lai-bơ-nit (G. Leibniz), ông đã sáng lập ra phép tính vi phân và tích phân. Ngay từ những năm 1665 – 1666, lúc 22, 23 tuổi, Niu-tơn đã xây dựng cơ sở của phép tính này mà ông gọi là "phương pháp thông lượng", và ông đã áp dụng phương pháp đó để giải những bài toán về Cơ học.

Niu-tơn và Lai-bơ-nit đều phát hiện ra mối liên hệ sâu sắc giữa tích phân và nguyên hàm. Lịch sử Toán học cho thấy khái niệm tích phân đã xuất hiện độc lập với đạo hàm và nguyên hàm. Do đó, việc thiết lập mối liên hệ giữa tích phân với nguyên hàm là một phát minh của Niu-tơn và Lai-bơ-nit.

Niu-tơn đã có những phát minh cơ bản về dãy vô hạn. Đặc biệt, ông mở rộng định lí, nay gọi là "định lí nhị thức Niu-tơn" cho trường hợp số mũ là một số thực tuỳ ý.

Niu-tơn còn có những cống hiến lớn lao trong các lĩnh vực Đại số, Hình học, Cơ học và Vật lí. Ông đã phát minh ra định luật vĩ đại về vạn vật hấp dẫn.

Bài tập

1. Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int_{0}^{2} x(x+1)^2\,\mathrm{d}x$;

e) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1-3x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \cos 5x\,\mathrm{d}x$.

2. Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_{0}^{2} |1-x|\,\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \frac{e^{2x+1}+1}{e^x}\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin 2x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

3. Sử dụng phương pháp đổi biến số, hãy tính :

a) $\int_{0}^{3} \frac{x^2}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} dx$ (đặt $u = x + 1$) ;

b) $\int_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$ (đặt $x = \sin t$) ;

c) $\int_{0}^{1} \frac{e^x(1+x)}{1 + xe^x} dx$ (đặt $u = 1 + xe^x$) ;

d) $\int_{0}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ $(a > 0)$ (đặt $x = a\sin t$).

4. Sử dụng phương pháp tính tích phân từng phần, hãy tính :

a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin x dx$;

b) $\int_{1}^{e} x^2 \ln x dx$;

c) $\int_{0}^{1} \ln(1+x) dx$;

d) $\int_{0}^{1} (x^2 - 2x - 1)e^{-x} dx$.

5. Tính các tích phân sau :

a) $\int_{0}^{1} (1+3x)^{\frac{3}{2}} dx$;

b) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} dx$;

c) $\int_{1}^{2} \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$.

6. Tính $\int_{0}^{1} x(1-x)^5 dx$ bằng hai phương pháp :

a) Đổi biến số $u = 1 - x$;

b) Tính tích phân từng phần.