§3 ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

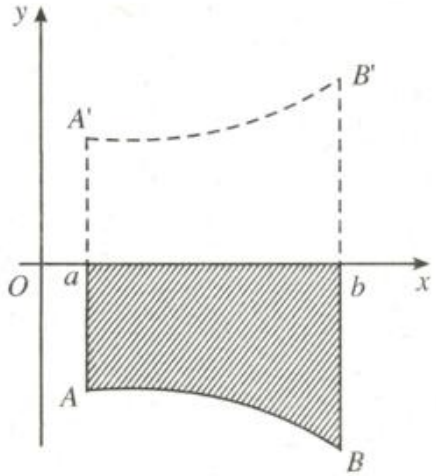
I - TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1

Tính diện tích hình thang vuông được giới hạn bởi các đường thẳng $y = -2x - 1$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 5$.

So sánh với diện tích hình thang vuông trong 1 của §2.

1. Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành



Hình 51

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị không âm trên đoạn $[a ; b]$. Ta đã biết hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ có diện tích S được tính theo công thức

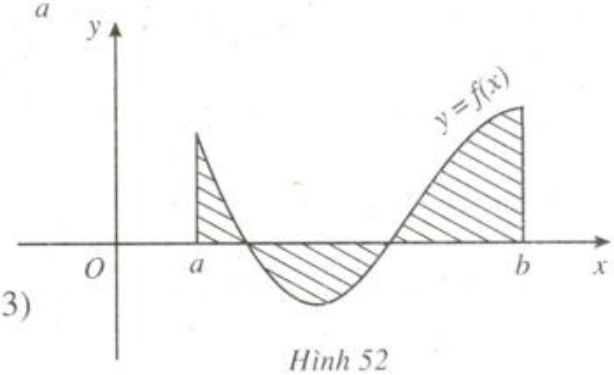
$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Trường hợp $f(x) \leq 0$ trên đoạn $[a ; b]$, ta có $-f(x) \geq 0$ và diện tích hình thang cong $aABb$ bằng diện tích hình thang cong $aA'B'b$ là hình đối xứng của hình thang đã cho qua trục hoành (H.51). Do đó

$$S = S_{aABb} = S_{aA'B'b} = \int_a^b (-f(x))\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

Tổng quát, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (H.52) được tính theo công thức

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.} \qquad (3)$$



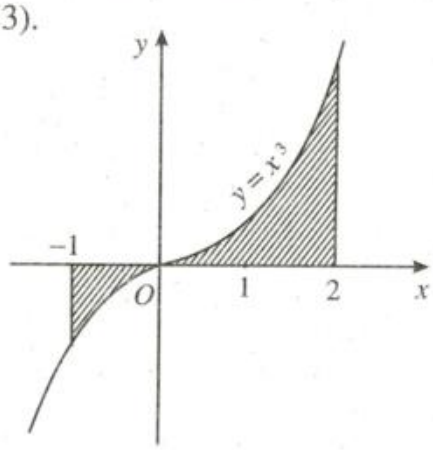
Hình 52

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ (H.53).

Giải. Ta có $x^3 \leq 0$ trên đoạn $[-1 ; 0]$ và $x^3 \geq 0$ trên đoạn $[0 ; 2]$. Áp dụng công thức (3), ta có :

$$S = \int_{-1}^{2} |x^3| \, dx = \int_{-1}^{0} (-x^3) \, dx + \int_{0}^{2} x^3 \, dx$$

$$= -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2} = \frac{17}{4}.$$

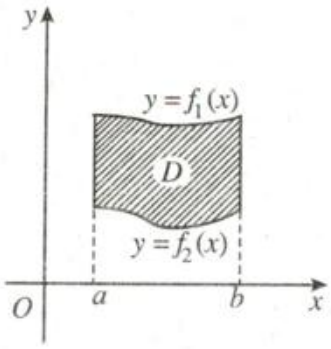


Hình 53

2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Cho hai hàm số $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ (H.54).

Xét trường hợp $f_1(x) \geq f_2(x)$ với mọi $x \in [a ; b]$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình thang cong giới hạn bởi trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ và các đường cong $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ tương ứng. Khi đó, diện tích S của hình D là



Hình 54

$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$$

Trong trường hợp tổng quát, người ta chứng minh được công thức

$$\boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.} \qquad (4)$$

CHÚ Ý

Khi áp dụng công thức (4), cần khử dấu giá trị tuyệt đối của hàm số dưới dấu tích phân. Muốn vậy, ta giải phương trình

$f_1(x) - f_2(x) = 0$ trên đoạn $[a ; b]$. Giả sử phương trình có hai nghiệm c, d $(c < d)$. Khi đó, $f_1(x) - f_2(x)$ không đổi dấu trên các đoạn $[a ; c]$, $[c ; d]$, $[d ; b]$. Trên mỗi đoạn đó, chẳng hạn trên đoạn $[a ; c]$, ta có

$$\int_a^c |f_1(x) - f_2(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_a^c [f_1(x) - f_2(x)]\mathrm{d}x\right|.$$

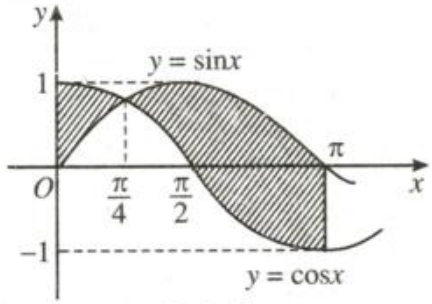
Ví dụ 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ và đồ thị của hai hàm số $y = \cos x$, $y = \sin x$ (H.55).

Giải. Đặt $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$.

Ta có $f_1(x) - f_2(x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \in [0 ; \pi]$.



Hình 55

Vậy diện tích của hình phẳng đã cho là

$$S = \int_0^{\pi} |\cos x - \sin x|\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos x - \sin x|\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\cos x - \sin x|\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\cos x - \sin x)\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|(\sin x + \cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\right| = 2\sqrt{2}.$$

Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = x^3 - x$ và $y = x - x^2$.

Giải. Ta có

$$f_1(x) - f_2(x) = (x^3 - x) - (x - x^2) = x^3 + x^2 - 2x.$$

Phương trình $f_1(x) - f_2(x) = 0$ có ba nghiệm $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1$.

Vậy diện tích hình phẳng đã cho là

$$S = \int_{-2}^{1} |x^3 + x^2 - 2x| dx = \left| \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x) dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-2}^{0} \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{0}^{1} \right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}.$$

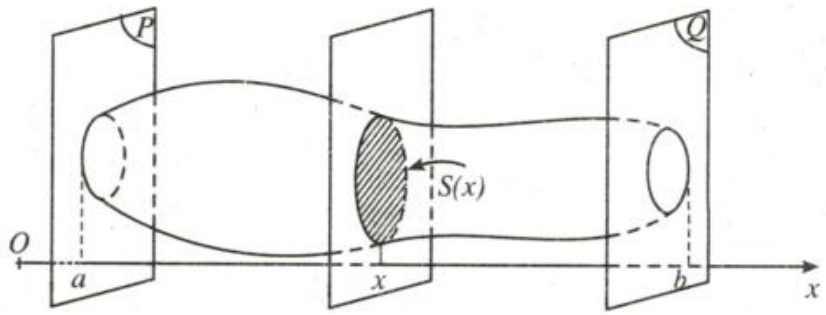
II - TÍNH THỂ TÍCH

2

Hãy nhắc lại công thức tính thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h.

1. Thể tích của vật thể

Cắt một vật thể $\mathcal{V}$ bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ cắt $\mathcal{V}$ theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ (H.56). Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$.



Hình 56

Người ta chứng minh được rằng thể tích V của phần vật thể $\mathcal{V}$ giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) được tính bởi công thức :

$$\boxed{V = \int_a^b S(x) dx.} \qquad (5)$$

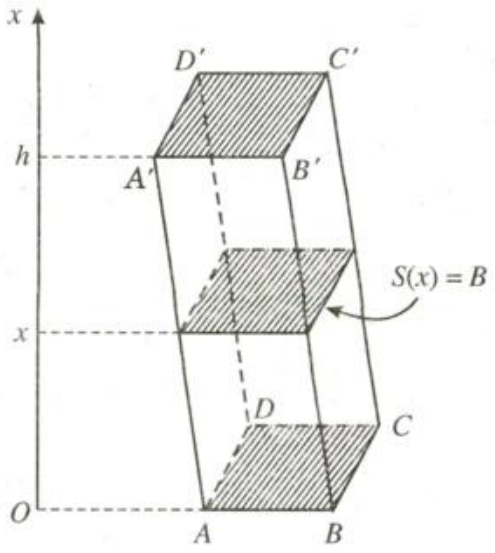
Ví dụ 4. Tính thể tích khối lăng trụ, biết diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h.

Giải. Chọn trục Ox song song với đường cao của khối lăng trụ, còn hai đáy nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x = 0$ và $x = h$ (H.57).

Hiển nhiên, một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với trục Ox, cắt lăng trụ theo thiết diện có diện tích không đổi $S(x) = B$ $(0 \le x \le h)$.

Áp dụng công thức (5), ta có

$$V = \int_0^h S(x)\mathrm{d}x = \int_0^h B\mathrm{d}x = Bx\Big|_0^h = Bh.$$



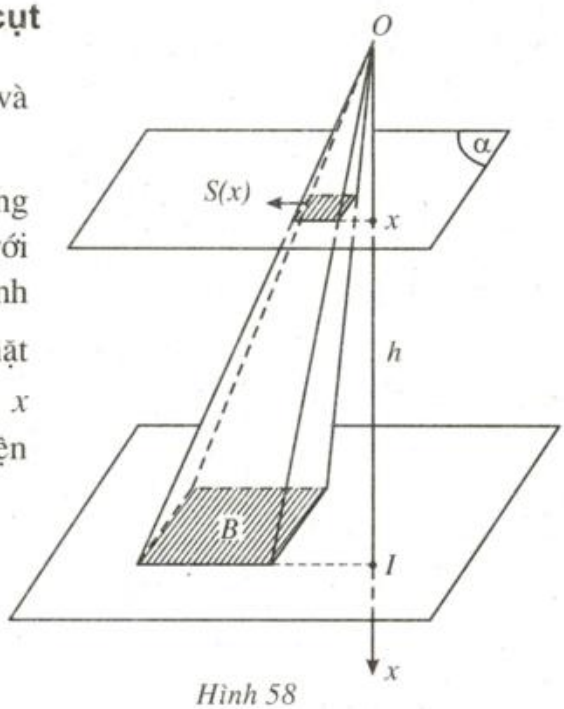
Hình 57

2. Thể tích khối chóp và khối chóp cụt

a) Cho khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B.

Chọn trục Ox vuông góc với mặt phẳng đáy tại điểm I sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và có hướng xác định bởi vectơ $\overrightarrow{OI}$. Khi đó $OI = h$. Một mặt phẳng (α) vuông góc với Ox tại x $(0 \le x \le h)$ cắt khối chóp theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ (H.58). Ta có

$$S(x) = B\frac{x^2}{h^2}.$$



Hình 58

Khi đó, thể tích V của khối chóp là

$$V = \int_0^h B\frac{x^2}{h^2}\mathrm{d}x = \frac{B}{h^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = \frac{Bh}{3}.$$

b) Cho khối chóp cụt tạo bởi khối chóp đỉnh S có diện tích hai đáy lần lượt là B, B' và chiều cao bằng h.

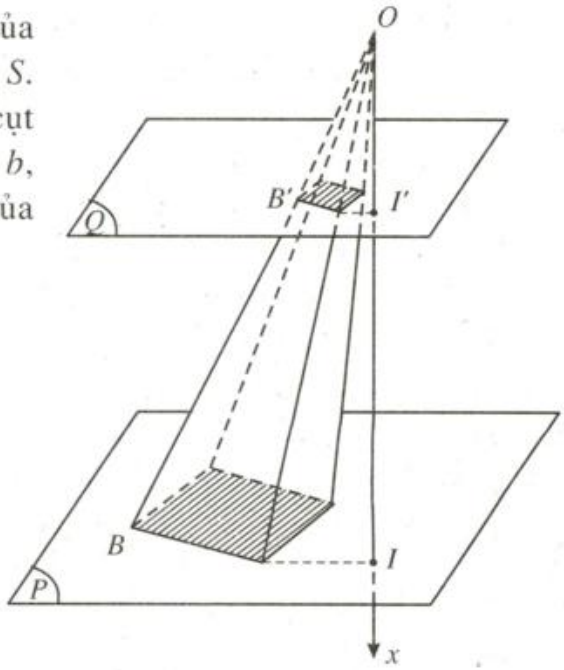
Chọn trục Ox trùng với đường cao của khối chóp và gốc O trùng với đỉnh S. Hai mặt phẳng đáy của khối chóp cụt cắt Ox tại I và I' (H.59). Đặt $OI = b$, $OI' = a$ $(a < b)$. Gọi V là thể tích của khối chóp cụt. Ta có

$$V = \int_a^b B\frac{x^2}{b^2}\mathrm{d}x = \frac{B}{3b^2}(b^3 - a^3)$$

$$= B\frac{b-a}{3}.\frac{a^2 + ab + b^2}{b^2}.$$

Vì $B' = B\dfrac{a^2}{b^2}$ và $h = b - a$ nên

$$V = \frac{h}{3}(B + \sqrt{BB'} + B').$$



Hình 59

III – THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

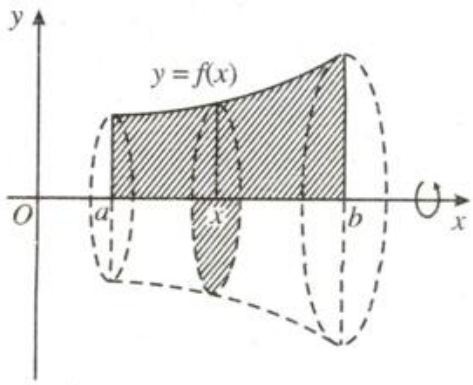
3

Nhắc lại khái niệm mặt tròn xoay và khối tròn xoay trong hình học.

Nghệ nhân làng gốm Bát Tràng

Bài toán

Giả sử một hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$ quay xung quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay (H.60). Hãy tính thể tích V của nó.



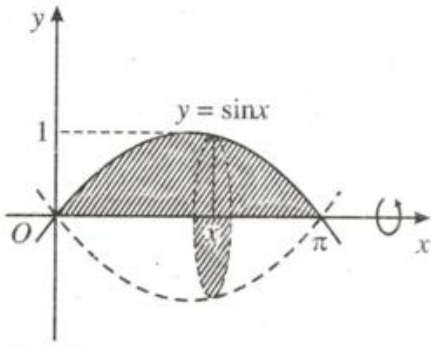
Hình 60

Giải. Thiết diện của khối tròn xoay trên tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x \in [a\,;\,b]$ là hình tròn có bán kính bằng $|f(x)|$. Do đó, diện tích của thiết diện là $S(x) = \pi f^2(x)$. Vậy theo công thức (5) ta có

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.} \qquad (6)$$

Ví dụ 5. Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ (H.61).

Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình này xung quanh trục Ox.



Hình 61

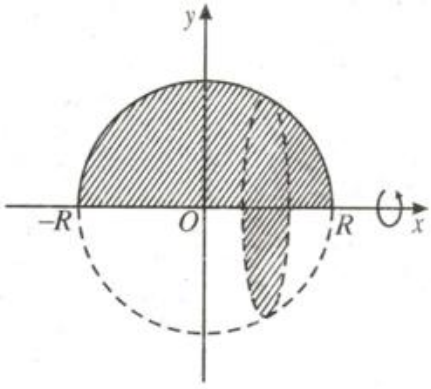
Giải. Áp dụng công thức (6), ta có

$$V = \pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Ví dụ 6. Tính thể tích hình cầu bán kính R.

Giải. Hình cầu bán kính R là khối tròn xoay thu được khi quay nửa hình tròn giới hạn bởi đường $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R \le x \le R)$ và đường thẳng $y = 0$ xung quanh trục Ox (H.62).



Hình 62

Vậy $V = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx$

$$= \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Bài tập

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

a) $y = x^2$, $y = x + 2$; b) $y = |\ln x|$, $y = 1$; c) $y = (x - 6)^2$, $y = 6x - x^2$.

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2 + 1$, tiếp tuyến với đường này tại điểm $M(2 ; 5)$ và trục Oy.

3. Parabol $y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm tại gốc toạ độ, bán kính $2\sqrt{2}$ thành hai phần. Tìm tỉ số diện tích của chúng.

4. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục Ox :

a) $y = 1 - x^2$, $y = 0$;

b) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$;

c) $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

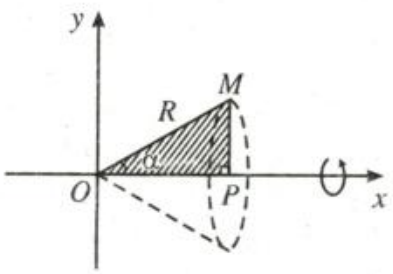
5. Cho tam giác vuông OPM có cạnh OP nằm trên trục Ox. Đặt

$$\widehat{POM} = \alpha,\ OM = R\ \left(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3}, R > 0\right).$$

Gọi $\mathcal{V}$ là khối tròn xoay thu được khi quay tam giác đó xung quanh trục Ox (H.63).

a) Tính thể tích của $\mathcal{V}$ theo α và R.

b) Tìm α sao cho thể tích của $\mathcal{V}$ lớn nhất.



Hình 63

BẠN CÓ BIẾT

LỊCH SỬ PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Phép tính tích phân đã được các nhà bác học sử dụng từ trước thế kỉ XVIII. Đến thế kỉ XIX, Cô-si (Cauchy, 1789 – 1857) và Ri-man (Riemann, 1826 – 1866) mới xây dựng được một lí thuyết chính xác về tích phân. Lí thuyết này về sau được Lơ-be-gơ (Lebesgue, 1875 – 1941) và Đăng-gioa (Denjoy, 1884 – 1974) hoàn thiện.

Để định nghĩa tích phân, các nhà toán học ở thế kỉ XVII và XVIII không dùng đến khái niệm giới hạn. Thay vào đó, họ nói "tổng của một số vô cùng lớn những số hạng vô cùng nhỏ". Chẳng hạn, diện tích của hình thang cong là tổng của một số vô cùng lớn những diện tích của những hình chữ nhật vô cùng nhỏ. Dựa trên cơ sở này, Kê-ple (Kepler, 1571 – 1630) đã tính một cách chính xác nhiều diện tích và thể tích. Các nghiên cứu này được Ca-va-li-ơ-ri (Cavalierie,1598 – 1647) tiếp tục phát triển.

Dưới dạng trừu tượng, tích phân đã được Lai-bơ-nit định nghĩa và đưa vào kí hiệu $\int$. Tên gọi "tích phân" do Bec-nu-li (Jacob Bernoulli, 1654 – 1705), học trò của Lai-bơ-nit đề xuất.

Như vậy, tích phân đã xuất hiện độc lập với đạo hàm và nguyên hàm. Do đó, việc thiết lập liên hệ giữa tích phân và nguyên hàm là một phát minh vĩ đại của Niu-tơn và Lai-bơ-nit.

Khái niệm hiện đại về tích phân, xem như giới hạn của các tổng tích phân, là của Cô-si và Ri-man.

BÀI ĐỌC THÊM

TÍNH DIỆN TÍCH BẰNG GIỚI HẠN

1. Tính diện tích hình thang cong

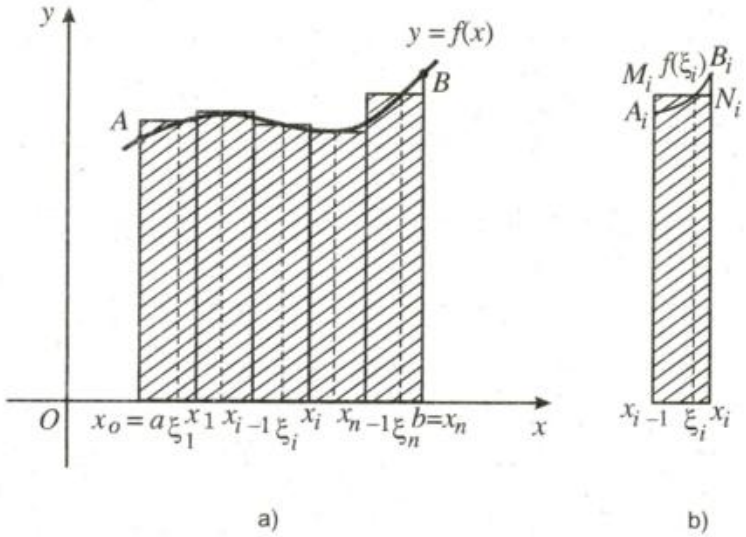
Xét hình thang cong giới hạn bởi các đường $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, $y = 0$ và $y = f(x)$, trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục, không âm trên đoạn $[a ; b]$.

Để xác định diện tích của hình thang cong trên. Ta dùng phép chia nhỏ, xấp xỉ bởi một hình bậc thang và chuyển qua giới hạn.

Ta chia đoạn $[a ; b]$ thành n phần tuỳ ý bởi các điểm $x_0, x_1, ..., x_n$ sao cho

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Từ các điểm chia, vẽ các đường thẳng song song với trục Oy, tương ứng chia hình thang cong thành n hình thang cong nhỏ (H.64a).



Hình 64

Tại mỗi hình thang cong $x_{i-1}A_iB_ix_i$, ta dựng một hình chữ nhật có đáy là đoạn $[x_{i-1}; x_i]$ và chiều cao bằng $f(\xi_i)$ với ξ_i lấy tuỳ ý trên đoạn $[x_{i-1}; x_i]$ (H.64b). Hình chữ nhật nhận được $x_{i-1}M_iN_ix_i$ có diện tích bằng

$$f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Số này xấp xỉ diện tích hình thang cong $x_{i-1}A_iB_ix_i$.

Kí hiệu S là diện tích hình thang cong $aABb$ cần tìm, ta có

$$S \approx f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + ... + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}),$$

hay
$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \qquad (1)$$

Xấp xỉ này càng chính xác nếu tất cả các hiệu số $x_i - x_{i-1}$ càng nhỏ. Sự kiện này gợi ý cho ta về phép chuyển qua giới hạn khi $\max\limits_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$ dần tới 0 để thu được diện tích hình thang cong $aABb$.

Xét

$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{khi} \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}) \to 0. \qquad (2)$$

Người ta chứng minh được rằng nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ thì giới hạn (2) luôn tồn tại không phụ thuộc cách chia đoạn $[a ; b]$ và cách lấy điểm $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$. Ta coi giới hạn ấy là **diện tích** của hình thang cong đã cho.

Vậy $S = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ khi $\max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}) \to 0.$ (3)

Giới hạn này chính là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

2. Áp dụng

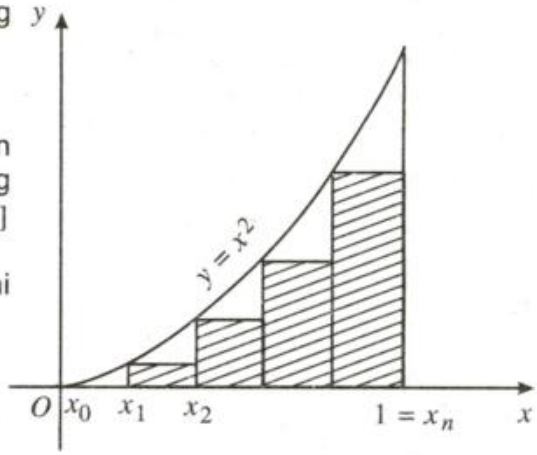
Nhờ giới hạn dạng (3), ta có thể tính được diện tích một số hình phẳng.

Ví dụ 1. Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường

$$y = x^2, y = 0, x = 0 \text{ và } x = 1.$$

Giải. Ta tiến hành theo phương pháp trên nhưng chia đoạn $[a\,;\,b]$ thành n phần bằng nhau, tức là độ dài các đoạn $[x_{i-1}\,;\,x_i]$ bằng $\frac{1}{n}$. Điểm ξ_i được chọn là mút trái của đoạn $[x_{i-1}\,;\,x_i]$, $\xi_i = x_{i-1}$. Khi đó

$$f(\xi_i) = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2,\ i = 1, 2, ..., n \text{ (H.65).}$$



Hình 65

Ta lập tổng dạng (1)

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + ... + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + ... + (n-1)^2) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

$$= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

Vậy $S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$

(vì chia đều đoạn $[a\,;\,b]$ nên $\max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}) \to 0 \Leftrightarrow n \to +\infty$).

Ví dụ 2. Tính diện tích hình tròn bán kính R.

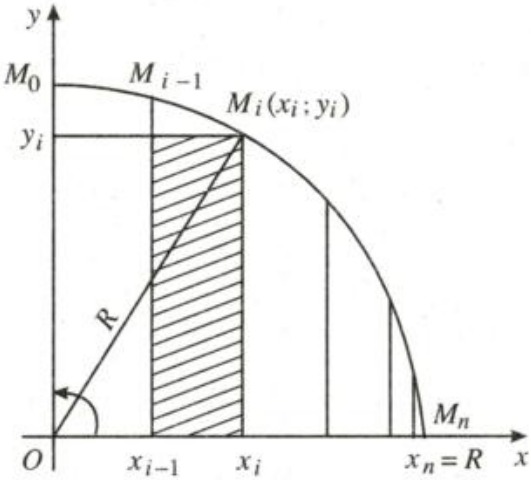
Giải. Vì diện tích hình tròn không phụ thuộc vị trí của nó trong mặt phẳng Oxy nên để xác định, ta giả sử tâm hình tròn trùng với gốc toạ độ. Hình tròn đối xứng qua tâm, nên ta chỉ cần tính diện tích của phần nằm ở góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng toạ độ.

Hình tròn được giới hạn bởi đường tròn có phương trình là $x^2 + y^2 = R^2$. Ta có thể viết phương trình này ở dạng tham số

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

Ta tính diện tích phần tư hình tròn được giới hạn bởi cung tròn $x = R\cos t,\ \ y = R\sin t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$ và hai trục toạ độ $x = 0$ và $y = 0$.

Ta chia đoạn [0 ; R] trên trục hoành thành n phần bởi các điểm x_i (i = 0, ..., n) sao cho các điểm M_i (i = 0, ..., n) tương ứng chia cung tròn thành n phần bằng nhau. Khi đó, số đo các cung nhỏ đều bằng $\frac{\pi}{2n}$. Điểm ξ_i được chọn trùng với x_i (mút phải đoạn $[x_{i-1}; x_i]$) (H.66). Ta có



Hình 66

$$\begin{cases} x_i = R\cos\left(\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2n}\right) \\ y_i = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2n}\right) \end{cases} (i = 1, 2, ..., n).$$

$x_0 = 0,\ y_0 = R.$

Lập tổng dạng (1), ta được

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} R^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2n}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - (i-1)\frac{\pi}{2n}\right)\right]$$

$$= 2R^2 \sum_{i=1}^{n} \sin(n-i)\frac{\pi}{2n}.\sin(2n-2i+1)\frac{\pi}{4n}.\ \sin\frac{\pi}{4n}$$

$$= 2R^2 \sin\frac{\pi}{4n}\left[\sin(n-1)\frac{\pi}{2n}.\sin(2n-1)\frac{\pi}{4n} + \right.$$

$$\left. + \sin(n-2)\frac{\pi}{2n}\sin(2n-3)\frac{\pi}{4n} + ... + \sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{4n}\right]$$

$$= R^2 \sin\frac{\pi}{4n}\left[\left(\cos\frac{\pi}{4n} - \cos(4n-3)\frac{\pi}{4n}\right) + \left(\cos\frac{\pi}{4n} - \cos(4n-7)\frac{\pi}{4n}\right) + \right.$$

$$\left. + ... + \left(\cos\frac{\pi}{4n} - \cos 5\frac{\pi}{4n}\right)\right]$$

$$= R^2 \cos\frac{\pi}{4n}.(n-1)\sin\frac{\pi}{4n} -$$

$$- R^2 \sin\frac{\pi}{4n}\left[\cos 5\frac{\pi}{4n} + \cos 9\frac{\pi}{4n} + ... + \cos(4n-3)\frac{\pi}{4n}\right].$$

Vì $\cos 5x + \cos 9x + ... + \cos(4n-3)x = \dfrac{\sin(4n-1)x - \sin 3x}{2\sin 2x}$,

nên tổng trên viết thành

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = R^2 \cos\frac{\pi}{4n}.(n-1)\sin\frac{\pi}{4n} - R^2 \sin\frac{\pi}{4n}\frac{\sin(4n-1)\frac{\pi}{4n} - \sin\frac{3\pi}{4n}}{2\sin\frac{2\pi}{4n}}$$

$$= R^2 \cos\frac{\pi}{4n}.(n-1)\sin\frac{\pi}{4n} - R^2.\frac{\sin(4n-1)\frac{\pi}{4n} - \sin\frac{3\pi}{4n}}{4\cos\frac{\pi}{4n}}.$$

Chuyển qua giới hạn đẳng thức trên khi $n \to +\infty$ (vì $\max\limits_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1}) \to 0 \Leftrightarrow n \to +\infty$), ta được

$$S = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[R^2 \cos\frac{\pi}{4n}.\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}} - R^2\frac{\sin(4n-1)\frac{\pi}{4n} - \sin\frac{3\pi}{4n}}{4\cos\frac{\pi}{4n}}\right] = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Vậy diện tích hình tròn bằng πR^2.