§2. Tỉ số lượng giác của góc nhọn

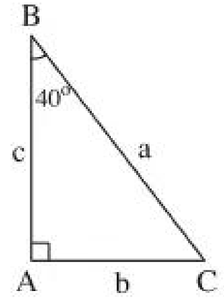
21. (h.44)

Vẽ tam giác vuông ABC, có $\widehat{A} = 90^o$, $\widehat{B} = 40^o$.

Đo các cạnh của tam giác, chẳng hạn AB = c, AC = b, BC = a. Khi đó

$$\sin 40^o = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}, \quad \cos 40^o = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a},$$

$$\text{tg}40^o = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \quad \text{cotg}\,40^o = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$



Hình 44

22. *Hướng dẫn :* Vẽ tam giác ABC vuông tại A.

Viết các tỉ số sinB, sinC theo các cạnh của tam giác ABC.

Thực hiện phép chia $\frac{\sin B}{\sin C}$ rồi rút gọn.

23. *Hướng dẫn :* $\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \cos B$.

Đáp số : 6,928 (cm).

24. a) $\frac{AC}{AB} = \text{tg}\alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{AC}{6} = \frac{5}{12} \Rightarrow AC = \frac{6.\,5}{12} = 2{,}5\,(\text{cm})$;

b) $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 6{,}5$ (cm).

25. *Đáp số :* a) $x \approx 58{,}769$;

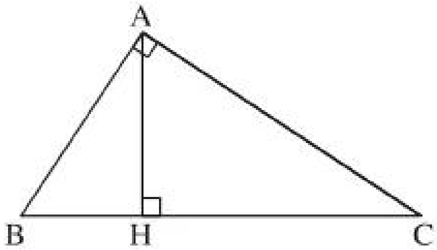
b) $x \approx 20{,}305$.

26. *Hướng dẫn :* Tính cạnh BC, sau đó tính các tỉ số lượng giác của góc B theo định nghĩa.

Vì $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là hai góc phụ nhau nên từ các tỉ số lượng giác của góc B suy ra các tỉ số lượng giác của góc C.

27. (h.45)

Trước tiên, dựa vào các hệ thức giữa cạnh và đường cao của tam giác vuông, tính AH, BC (đối với câu a)) ; Tính AB, AC (đối với câu b)). Sau đó, viết sinB, sinC theo định nghĩa rồi viết kết quả dưới dạng số thập phân.



Hình 45

Đáp số :

a) $\sin B = \dfrac{12}{13} \approx 0{,}9231$; $\sin C = \dfrac{13}{33{,}8} \approx 0{,}3846$;

b) $\sin B = \dfrac{AC}{BC} \approx 0{,}7559$; $\sin C = \dfrac{AB}{BC} \approx 0{,}6547$.

28. *Hướng dẫn :* Sử dụng quan hệ giữa các tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

29. *Đáp số :* a) 1 ; b) 0.

30. *Đáp số :* $\text{cotg}P = 2\ \text{cotg}N$.

31. *Đáp số :* 6 và 5,1962.

32. a) *Đáp số :* 15 ;

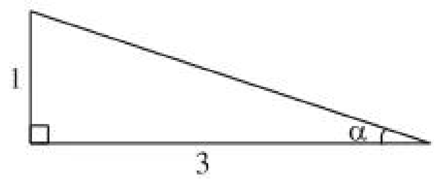
b) *Hướng dẫn* : Trước tiên tính CD trong tam giác vuông BCD.

Đáp số : AC = 13.

33. *Hướng dẫn :* Sử dụng kết quả của bài tập 14 chương I, phần Hình học, sách giáo khoa Toán 9 tập một.

Đáp số : $\sin\alpha = 0{,}6$; $\text{tg}\alpha = 0{,}75$; $\text{cotg}\alpha \approx 1{,}3333$.

34. a) (h.46) $\text{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$ nên α là một góc nhọn của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 1 và 3, từ đó ta tính được cạnh huyền khoảng 3,1623.



Hình 46

Vậy $\sin\alpha = \dfrac{1}{3,1623} \approx 0,3162$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{3,1623} \approx 0,9487$.

b) Tương tự câu a) ta có

$$\sin\alpha = 0,8 \text{ ; } \cos\alpha = 0,6.$$

35. Đưa các tỉ số lượng giác về dạng phân số.

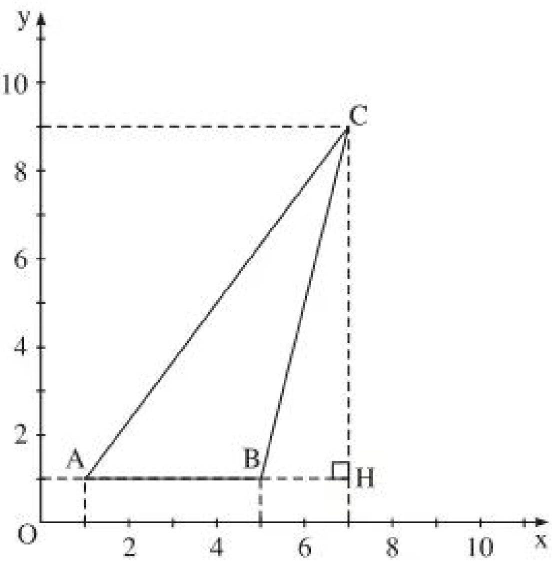
– Dựng tam giác vuông biết cạnh huyền và cạnh góc vuông (hoặc hai cạnh góc vuông) lần lượt bằng tử và mẫu của các tỉ số lượng giác.

– Trong mỗi tam giác vuông đó, xác định góc α tương ứng.

Ví dụ :

$$\sin\alpha = 0,25 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{4}.$$

Dựng tam giác vuông có cạnh huyền bằng 4 và cạnh góc vuông bằng 1. Trong tam giác đó, α là góc đối diện với cạnh bằng 1.



Hình 47

36. (h.47)

a) $\text{tg}\widehat{BAC} = \dfrac{CH}{AH} = \dfrac{9-1}{7-1} = \dfrac{8}{6}$;

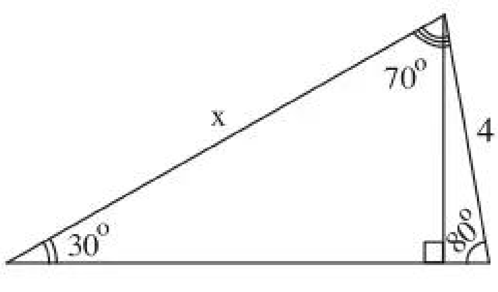
$\text{tg}\widehat{BAC} \approx 1,3333.$

b) $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} =$

$= \sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2} = 10.$

37. (h.48) Kẻ đường cao xuất phát từ đỉnh góc 70^o. Chẳng hạn ta có phương trình sau

$$x \,.\, \sin 30^o = 4\sin 80^o.$$



Hình 48

38. Làm tương tự bài 37 ta có

$$\sin L = \frac{2,8\sin 30^o}{4,2} \approx 0,3333.$$

Bài tập bổ sung

2.1. (D).

2.2. (C).

2.3. (D).

2.4. (A).

2.5. (B).

2.6. (D).

2.7. (B).

2.8. (A).

2.9. (C).

2.10. (D).

2.11. (D).

2.12. $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{3}{4}$ nên $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \sqrt{3}.$$

2.13. $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{7}}{3},\ \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

2.14. Do $AB = \frac{1}{3}BC$ nên $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$. Từ đó $\cos C = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$$\text{tg}C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},\ \text{cotg}C = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

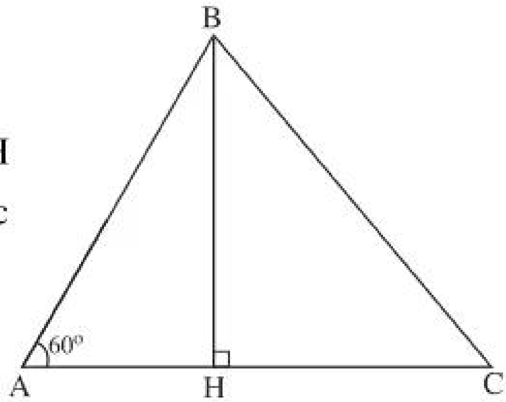
2.15. a) $2\sin 30^\circ - 2\cos 60^\circ + \text{tg}45^\circ = \text{tg}45^\circ = 1$ (do $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$).

b) $\sin 45^\circ + \text{cotg}60^\circ.\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

c) $\text{cotg}44^o \,.\, \text{cotg}45^o \,.\, \text{cotg}46^o = \text{cotg}45^o = 1$

(vì $\text{cotg}44^o = \text{tg}46^o$ (do $44^o + 46^o = 90^o$)

mà $\text{tg}46^o \,.\, \text{cotg}46^o = 1$).



Hình bs . 8a

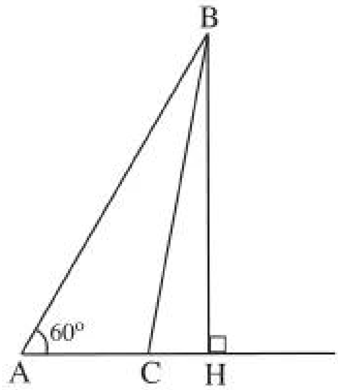
2.16. Kẻ đường cao BH của tam giác ABC thì H nằm trên tia AC (để $\widehat{BAC} = 60^o$ là góc nhọn), do đó $HC^2 = (AC - AH)^2$ (xem h. bs. 8a, 8b).

Công thức Py-ta-go cho ta

$$BC^2 = BH^2 + HC^2$$
$$= BH^2 + (AC - AH)^2$$
$$= BH^2 + AH^2 + AC^2 - 2AC.AH$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AC.AH.$$

Do $\widehat{BAC} = 60^o$ nên $AH = AB\cos60^o = \dfrac{AB}{2}$,

suy ra $BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB.AC$.



Hình bs. 8b

2.17. Giả sử hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại I, $\widehat{AIB} = \alpha$ là góc nhọn (xem h. bs. 9).

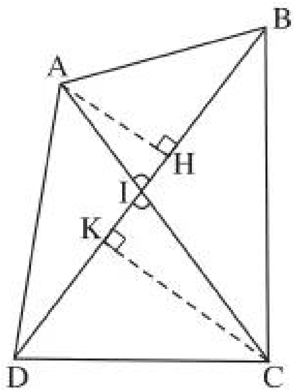
Kẻ đường cao AH của tam giác ABD và đường cao CK của tam giác CBD.

Ta có : $AH = AI\sin\alpha$, $CK = CI\sin\alpha$, diện tích tam giác ABD là $S_{ABD} = \dfrac{1}{2}BD.AH$, diện tích tam giác CBD là

$$S_{CBD} = \frac{1}{2}BD.CK.$$

Từ đó diện tích S của tứ giác ABCD là

$$S = S_{ABD} + S_{CBD} = \frac{1}{2}BD.(AH + CK)$$
$$= \frac{1}{2}BD.(AI + CI)\sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2}BD.AC\sin\alpha.$$



Hình bs. 9

2.18. a) $\dfrac{1-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}=\dfrac{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}.$

b) $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{1-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}=\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}.$

2.19. a) $\dfrac{3\,\mathrm{cotg}\,60^o}{2\cos^2 30^o-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{3}{2}-1}=2\sqrt{3}.$

b) $\dfrac{\cos 60^o}{1+\sin 60^o}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,30^o}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\dfrac{2(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=2.$

2.20. (h.bs. 10). Kẻ đường cao CH của tam giác ACD vuông tại C. Khi đó

AH = BC = 4, HD = AD – AH = 12.

Từ đó

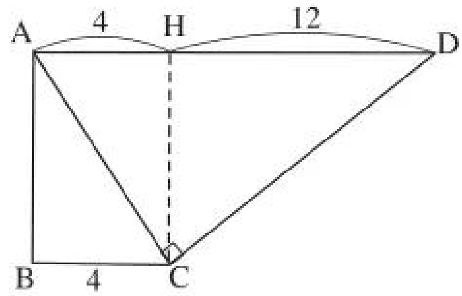
$HC^2 = HA.HD = 48$, vậy $HC = 4\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông HCD, ta có

$\mathrm{tg}\,D=\dfrac{HC}{HD}=\dfrac{4\sqrt{3}}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\mathrm{tg}\,30^o$

nên $\widehat{D}=30^o$. Suy ra

$\widehat{BCD}=180^o-30^o=150^o.$

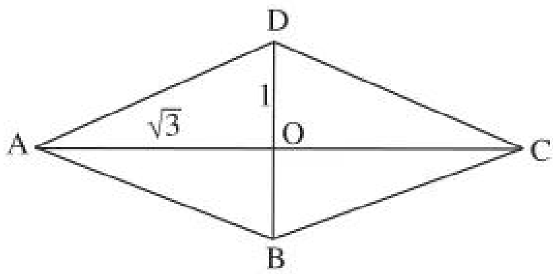


Hình bs. 10

2.21. (h.bs.11). Coi đường chéo $AC = 2\sqrt{3}$, đường chéo BD = 2 thì để ý rằng AC và BD vuông góc, ta có

$\mathrm{tg}\,\widehat{DAC}=\dfrac{OD}{OA}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\mathrm{tg}\,30^o$

nên $\widehat{DAC}=30^o$ từ đó góc A của hình thoi là 60^o. Suy ra $\widehat{C}=60^o$ còn $\widehat{B}=\widehat{D}=120^o$.



Hình bs. 11

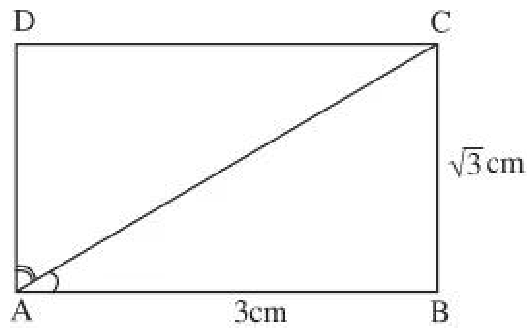
2.22. (h.bs.12). Hình chữ nhật ABCD có

AB = 3cm, BC = $\sqrt{3}$ cm nên

$$\mathrm{tg}\,\widehat{BAC} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \mathrm{tg}\,30^o.$$

Vậy $\widehat{BAC} = 30^o$,

$\widehat{DAC} = 90^o - 30^o = 60^o$.



Hình bs. 12