

mà $\sqrt{5} > 2$ nên $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} > 2$.

Vậy, không tồn tại x thoả mãn $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 2$.

103. Khai triển $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, ta được $x - \sqrt{x} + 1$.

Vậy ta có đẳng thức

$$x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Ta thấy $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ và dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ hay $x = \frac{1}{4}$.

Do vậy, $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ và dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{4}$.

Vậy $x - \sqrt{x} + 1$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{4}$ và giá trị này đạt được khi $x = \frac{1}{4}$.

Suy ra $\frac{1}{x - \sqrt{x} + 1}$ có giá trị lớn nhất là $\frac{4}{3}$ khi $x = \frac{1}{4}$.

104. Ta biến đổi $\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = \frac{\sqrt{x} - 3 + 4}{\sqrt{x} - 3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} - 3}$.

Để $1 + \frac{4}{\sqrt{x} - 3}$ nhận giá trị nguyên thì $\frac{4}{\sqrt{x} - 3}$ phải có giá trị nguyên.

Do x nguyên nên \sqrt{x} là số vô tỉ hoặc là số nguyên.

- Với \sqrt{x} là số vô tỉ thì $\sqrt{x} - 3$ là số vô tỉ nên $\frac{4}{\sqrt{x} - 3}$ không thể là số nguyên. Vậy trong trường hợp này không có giá trị nào của x để biểu thức đã cho nhận giá trị nguyên.

- Với \sqrt{x} là số nguyên thì $\sqrt{x} - 3$ là nguyên. Vậy để $\frac{4}{\sqrt{x} - 3}$ nguyên ta phải có $\sqrt{x} - 3$ phải là ước của 4.

Mặt khác, theo định nghĩa căn bậc hai thì $x \geq 0$ và $\sqrt{x} \geq 0$.

Vậy giá trị x nguyên cần tìm phải không âm và phải thoả mãn điều kiện $\sqrt{x} \geq 0$ và $\sqrt{x} - 3$ là ước của 4.

Ta thấy 4 có các ước số là ± 4 ; ± 2 và ± 1 .

Với ước là 4, ta có $\sqrt{x} - 3 = 4$, suy ra $x = 49$;

Với ước là -4 , ta có $\sqrt{x} - 3 = -4$, không tồn tại x ;

Với ước là 2, ta có $\sqrt{x} - 3 = 2$, suy ra $x = 25$;

Với ước là -2 , ta có $\sqrt{x} - 3 = -2$; suy ra $x = 1$;

Với ước là 1, ta có $\sqrt{x} - 3 = 1$; suy ra $x = 16$;

Với ước là -1 , ta có $\sqrt{x} - 3 = -1$, suy ra $x = 4$.

105. a) Chọn mẫu chung của vế trái là $2(a - b)$, biến đổi vế trái ta có :

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{2(a - b)} - \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2(a - b)} + \frac{4b}{2(a - b)} = \\ & = \frac{a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b - (a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b) + 4b}{2(a - b)} = \frac{4\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{2(a - b)}. \end{aligned}$$

Rút gọn, ta suy ra vế trái bằng vế phải.

b) Ta biến đổi vế trái

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \right)^2 = \\ & = \left(\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \right)^2 \\ & = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \right)^2 \\ & = \frac{[(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})]^2}{(a - b)^2} = \frac{(a - b)^2}{(a - b)^2} = 1. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng.