§5. Hệ số góc của đường thẳng y = ax + b

25. a) Đường thẳng đi qua gốc toạ độ có dạng $y = ax$.

Vì đường thẳng $y = ax$ qua điểm $A(2\ ;\ 1)$ nên ta có :

$$1 = a.2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Vậy hệ số góc của đường thẳng đi qua gốc toạ độ và điểm $A(2\ ;\ 1)$ là $\frac{1}{2}$.

b) Đường thẳng qua gốc toạ độ có dạng $y = ax$. Vì đường thẳng qua điểm $B(1\ ;\ -2)$ nên toạ độ của điểm B phải thoả mãn :

$$-2 = a.1 \Rightarrow a = -2.$$

Vậy hệ số góc cần tìm là -2.

c) (h.20)

Vẽ đồ thị của hai hàm số

$$y = \frac{1}{2}x \text{ và } y = -2x$$

trên cùng hệ trục toạ độ Oxy.

– Dựng điểm $A(2\ ;\ 1)$ và $B(1\ ;\ -2)$.

– Kẻ đường thẳng qua O, A ta được đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x$.

– Kẻ đường thẳng qua O, B ta được đồ thị của hàm số $y = -2x$.

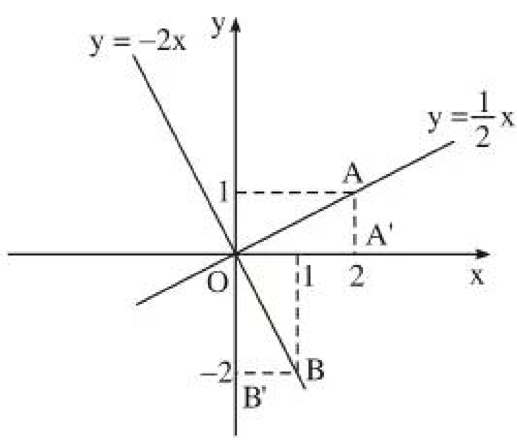
• Gọi A' là hình chiếu của A trên Ox, B' là hình chiếu của B trên Oy. Hai tam giác OBB' và OAA' bằng nhau (vì có hai cặp cạnh góc vuông bằng nhau), nên ta có các góc tương ứng bằng nhau :

$$\widehat{BOB'} = \widehat{AOA'}$$

mà $\widehat{BOB'} + \widehat{BOA'} = 90^o$ (vì $Ox \perp Oy$)

nên $\widehat{BOA'} + \widehat{A'OA} = 90^o$.

Vậy hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.



Hình 20

26. (h.21)

Cho hai đường thẳng :

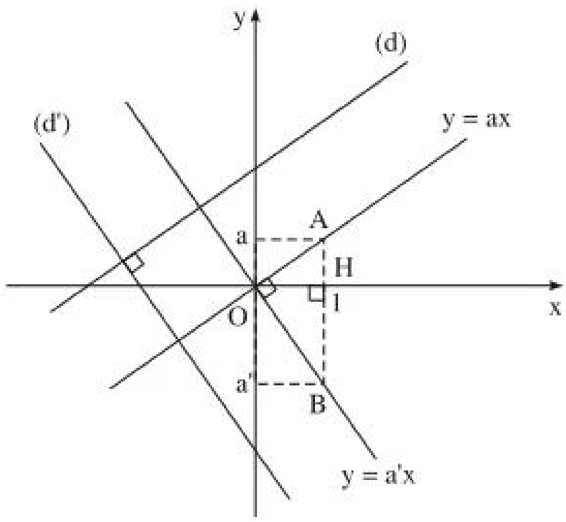
$$y = ax + b \; ; \qquad (d)$$

$$y = a'x + b'. \qquad (d')$$

Ta phải chứng minh

$$(d) \perp (d') \Leftrightarrow a.a' = -1.$$

Qua O kẻ các đường thẳng song song với (d) và (d'). Các đường thẳng này tương ứng sẽ là $y = ax$ và $y = a'x$.



Hình 21

• Trước hết, ta chứng minh rằng nếu $(d) \perp (d')$ thì $a.a' = -1$. Không làm mất tính tổng quát, giả sử $a > 0$, suy ra $a' < 0$ (vì các góc tạo bởi đường thẳng $y = ax$ và $y = a'x$ với tia Ox hơn kém nhau 90^o).

Đường thẳng $y = ax$ đi qua điểm $A(1 \; ; a)$.

Đường thẳng $y = a'x$ đi qua điểm $B(1 \; ; a')$.

Dễ thấy $AB \perp Ox$ tại điểm H có hoành độ bằng 1.

Vì $(d) \perp (d')$ (theo giả thiết) $\Rightarrow \widehat{AOB} = 90^o \Rightarrow HA.HB = OH^2$ hay $a.|a'| = 1 \Rightarrow -a.a' = 1 \Rightarrow a.a' = -1$ (đpcm).

• Ta chứng minh điều ngược lại : Nếu $a.a' = -1$ thì $(d) \perp (d')$.

Thật vậy, từ $a.a' = -1 \Rightarrow a.|a'| = 1 \Rightarrow HA.HB = OH^2 \Rightarrow \dfrac{HA}{OH} = \dfrac{OH}{HB}$

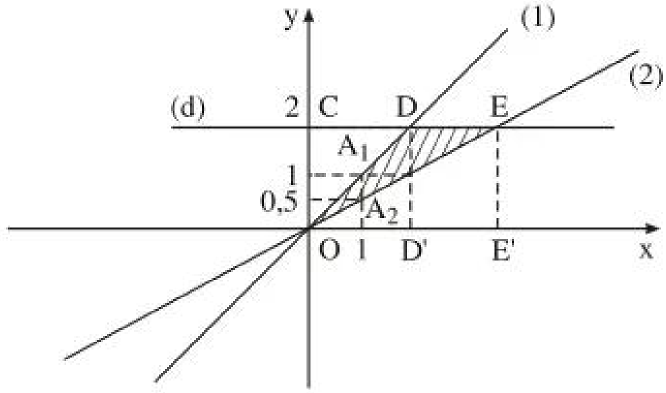
$\Rightarrow \Delta HOA \backsim \Delta HBO \Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{OBH}$

mà $\widehat{OBH} + \widehat{HOB} = 90^o \Rightarrow \widehat{AOH} + \widehat{HOB} = \widehat{AOB} = 90^o$, từ đó suy ra $(d) \perp (d')$.

Vậy ta có đpcm.

27. (h.22)

a) Dựng các điểm $A_1(1 ; 1)$ và $A_2(1 ; 0{,}5)$, lần lượt vẽ đường thẳng qua O và A_1, đường thẳng qua O và A_2 được hai đường thẳng (1) và (2) là đồ thị của các hàm số



Hình 22

$y = x$; (1)

$y = 0{,}5x$. (2)

b) Qua điểm C trên trục tung Oy có tung độ bằng 2, vẽ đường thẳng (d) song song với trục Ox. Đường thẳng (d) theo thứ tự cắt các đường thẳng (1) và (2) tại D và E.

– Tính toạ độ của D : Điểm D thuộc đường thẳng (d) nên có tung độ $y = 2$. Thay giá trị $y = 2$ vào phương trình (1), tính được $x = 2$.

Vậy ta có : $D(2 ; 2)$.

– Tính toạ độ của E : Tương tự, điểm E có tung độ $y = 2$.

Thay giá trị $y = 2$ vào (2) tính được $x = 4$.

Ta có điểm $E(4 ; 2)$.

Gọi hình chiếu của D trên Ox là D', của E trên Ox là E'. Ta có :

$$OD' = 2 ; OE' = 4$$

$$OD^2 = OD'^2 + DD'^2 \Rightarrow OD = \sqrt{OD'^2 + DD'^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$OE^2 = OE'^2 + EE'^2 \Rightarrow OE = \sqrt{OE'^2 + EE'^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$DE = OE' - OD' \Rightarrow DE = 4 - 2 = 2.$$

Chu vi của tam giác ODE bằng $(\sqrt{8} + \sqrt{20} + 2)$ (đơn vị dài).

Diện tích tam giác ODE bằng $\frac{1}{2}DE.OC = \frac{1}{2}.2.2 = 2$ (đơn vị diện tích).

28. (h.23)

a) – Vẽ đồ thị

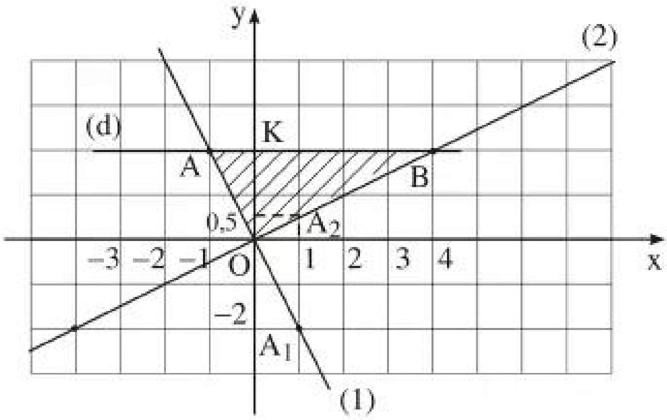
$$y = -2x. \qquad (1)$$

Cho x = 1, y = –2.1 = –2 đường thẳng y = –2x qua gốc toạ độ O(0 ; 0) và điểm $A_1(1 ; -2)$.

– Vẽ đồ thị

$$y = 0,5x. \qquad (2)$$

Cho x = 1, y = 0,5.1 = 0,5.



Hình 23

Đường thẳng y = 0,5x qua gốc toạ độ O(0 ; 0) và điểm $A_2(1 ; 0,5)$.

b) Gọi A(x ; 2) là giao điểm của đường thẳng (1) và đường thẳng (d), ta có :

$$-2.x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{-2} = -1.$$

Vậy ta có A(–1 ; 2).

Gọi B(x ; 2) là giao điểm của đường thẳng (2) và đường thẳng (d), ta có :

$$0,5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{0,5} = 4.$$

Vậy ta có B(4 ; 2).

c) *Ta đã biết : Nếu* a.a' = –1 *thì hai đường thẳng* y = ax *và* y = a'x *vuông góc với nhau (Bài tập 26).*

Xét hai đường thẳng y = –2x và y = 0,5x :

Vì (–2) . (0,5) = –1 nên hai đường thẳng này vuông góc với nhau.

Bằng phương pháp minh hoạ hình học, xét hai tam giác vuông ở K (OAK và BOK), ta có :

$$\frac{AK}{OK} = \frac{OK}{BK} \left(\text{vì } \frac{1}{2} = \frac{2}{4}\right),$$

suy ra ΔOAK ∽ ΔBOK.

Từ đó, ta có :

$$\widehat{AOK} = \widehat{OBK}$$

mà $\widehat{OBK} + \widehat{KOB} = 90^o$ nên $\widehat{AOK} + \widehat{KOB} = 90^o$.

29. Ta phải chứng minh họ đường thẳng

$$y = mx + (2m + 1) \qquad (1)$$

luôn đi qua một điểm cố định nào đó.

Giả sử điểm $M(x_0 ; y_0)$ là điểm mà họ đường thẳng (1) luôn luôn đi qua với mọi m, thế thì toạ độ (x_0, y_0) của điểm M phải thoả mãn (1) với mọi m. Nghĩa là với mọi số thực m, ta có :

$$y_0 = mx_0 + (2m + 1) \Leftrightarrow (x_0 + 2)m + (1 - y_0) = 0. \qquad (2)$$

Phương trình (2) nghiệm đúng với mọi giá trị của ẩn m, do đó phải có các hệ số đều bằng 0, nghĩa là :

$$x_0 + 2 = 0 \text{ và } 1 - y_0 = 0.$$

Suy ra $x_0 = -2$ và $y_0 = 1$.

Vậy ta có điểm M(−2 ; 1) là điểm cố định mà họ đường thẳng (1) luôn luôn đi qua với mọi số thực m.

Bài tập bổ sung

5.1. a) (C) ;

b) (D).

5.2. a) (C) ;

b) (D).

5.3. a) (A) ;

b) (C).

5.4. a) Phương trình của đường thẳng AB có dạng

$$y = ax + b.$$

Do đường thẳng đi qua A(4 ; 5) và B(1 ; −1) nên ta có :

$$5 = a.4 + b \qquad (1)$$

$$-1 = a.1 + b \qquad (2)$$

Trừ từng vế của (1) và (2), ta có :

$$6 = 3a \Rightarrow a = 2.$$

Thay $a = 2$ vào (1) để tìm b, ta có :

$$5 = 2.4 + b \Rightarrow b = -3.$$

Vậy phương trình của đường thẳng AB là

$$y = 2x - 3.$$

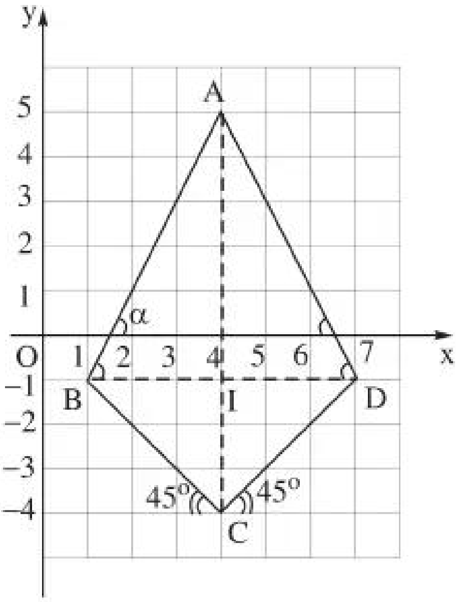
Làm tương tự như trên, ta có :

Phương trình của đường thẳng BC là

$$y = -x.$$

Phương trình của đường thẳng CD là

$$y = x - 8.$$



Hình bs. 3

Phương trình của đường thẳng DA là $y = -2x + 13$.

b) (h.bs. 3) Hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại I.

– Đường thẳng AB có hệ số góc bằng 2, do đó ta có

$\mathrm{tg}\alpha = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63^o26'$ (tính trên máy tính bỏ túi).

Suy ra $\widehat{ABD} \approx 63^o26'$.

Tam giác ABD cân, nên cũng có $\widehat{ADB} \approx 63^o26'$.

Từ đó suy ra $\widehat{BAD} = 180^o - 2.\widehat{ABD} \approx 53^o8'$.

Đường thẳng BC có hệ số góc bằng -1 nên BC là phân giác của góc vuông phần tư thứ tư của mặt phẳng toạ độ Oxy.

Đường thẳng CD có hệ số góc bằng 1, do đó CD song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Từ đó suy ra : $\widehat{BCD} = 180^o - 45^o - 45^o = 90^o$.

Và do đó : $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = (360^o - \widehat{BCD} - \widehat{BAD}) : 2 \approx 108^o26'$.