

$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc} \quad (2)$$

$$\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}. \quad (3)$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được :

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Mở rộng cho bốn số  $a, b, c, d$  không âm, ta có bất đẳng thức

$$a + b + c + d \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da}.$$

Mở rộng cho năm số  $a, b, c, d, e$  không âm, ta có bất đẳng thức

$$a + b + c + d + e \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{de} + \sqrt{ea}.$$

### Bài tập bổ sung

**8.1.** Chọn (D).

## §9. Căn bậc ba

88. Ta có kết quả lần lượt là :  $-7 ; 0,3 ; 1,1 ; -0,8$ .

89. a) *Giải* : Từ định nghĩa căn bậc ba, biết  $\sqrt[3]{x} = -1,5$ , ta có  $x = (-1,5)^3$ .

Suy ra  $x = -3,375$ .

b) *Hướng dẫn* : Tương tự, từ  $\sqrt[3]{x-5} = 0,9$ , ta có

$$x - 5 = (0,9)^3.$$

Suy ra  $x = 5 + (0,9)^3$ .

Tính được  $x = 5,729$ .

90. a)  $\sqrt[3]{a^3b} = \sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b} = a\sqrt[3]{b}$ .

$$\text{b)} \sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} = \sqrt[3]{\frac{ab}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{1}{b}\sqrt[3]{ab}.$$

91. a) 2,289 ;      b) 2,936 ;      c) -3,359 ;      d) -0,431.

92. a) Giải :  $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$ .

Ta có  $24 > 23$ , nên  $\sqrt[3]{24} > \sqrt[3]{23}$ .

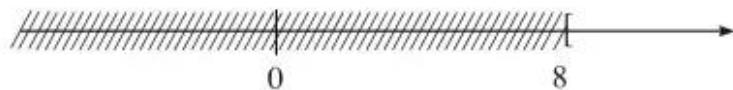
Vậy  $2\sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{23}$ .

b) Hướng dẫn : Ta có  $11 = \sqrt[3]{11^3} = \sqrt[3]{1331}$ . Từ đó suy ra  $33 < 3\sqrt[3]{1333}$ .

93. a) Giải : Theo tính chất căn bậc ba, ta có

$$\sqrt[3]{x} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \geq \sqrt[3]{2^3} \Leftrightarrow x \geq 2^3 \Leftrightarrow x \geq 8.$$

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số, ta được hình 9.



Hình 9

b) Hướng dẫn : Tương tự câu a), ta có  $x \leq -3,375$ .

94. Khai triển vế phải và rút gọn, ta được kết quả vế phải bằng vế trái.

a) Nếu  $x, y, z$  không âm thì  $x + y + z$  không âm. Suy ra

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0.$$

Từ đó, ta có  $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz$ .

b) Đặt  $x = \sqrt[3]{a}$ ,  $y = \sqrt[3]{b}$ ,  $z = \sqrt[3]{c}$ .

Ta thấy  $a, b, c$  không âm, nên  $x, y$  và  $z$  không âm. Dựa vào kết quả câu a) ta có

$$\frac{(\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3 + (\sqrt[3]{c})^3}{3} \geq \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{c}.$$

Suy ra  $\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ .

95. Lập luận tương tự bài 67.

## Ôn tập chương I

96. Chọn (D).

(Có thể nhầm và loại các trường hợp (A) ; (B) và (C)).

97. Chọn (A).

98. a) Ta thấy  $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$  xác định và không âm, nên theo định nghĩa căn bậc hai số học, ta sẽ chứng tỏ bình phương của nó bằng 6.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})^2 &= 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 2 - \sqrt{3} \\ &= 4 + 2\sqrt{2^2 - 3} = 4 + 2 = 6. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

b) Ta biến đổi vế trái.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}} &= \frac{2}{|2-\sqrt{5}|} - \frac{2}{|2+\sqrt{5}|} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}-2} - \frac{2}{\sqrt{5}+2} = \frac{2(\sqrt{5}+2)-2(\sqrt{5}-2)}{5-4} = 8. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng.

99. Rút gọn  $A = \frac{|2x-1|}{2(2x-1)}$ . Xét hai trường hợp

– Nếu  $x > 0,5$  ta có  $A = 0,5$  ;

– Nếu  $x < 0,5$  ta có  $A = -0,5$ .

Suy ra điều phải chứng minh.

100. a) *Chú ý* :  $4 - 2\sqrt{3} = 3 + 1 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2$ .

*Đáp số* : 1.

b) *Chú ý* :  $15 - 6\sqrt{6} = (3 - \sqrt{6})^2$  và  $33 - 12\sqrt{6} = (3 - 2\sqrt{6})^2$ .

*Đáp số* :  $\sqrt{6}$ .

c) Thực hiện phép chia cho  $\sqrt{10}$ .

Đáp số:  $23\sqrt{5}$ .

**101.** a) Khai triển vế phải, so sánh với vế trái, suy ra đẳng thức đúng.

b) Áp dụng câu a) ta có

$$A = \sqrt{(\sqrt{x-4} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4} - 2)^2}.$$

Từ đó, nhận thấy  $x \geq 4$  là điều kiện xác định của A.

Rút gọn được  $A = \sqrt{x-4} + 2 + |\sqrt{x-4} - 2|$ .

Ta thấy  $\sqrt{x-4} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-4} \geq 2 \Leftrightarrow x-4 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 8$ .

Do đó :

• Với  $x \geq 8$ , ta có

$$A = \sqrt{x-4} + 2 + \sqrt{x-4} - 2 = 2\sqrt{x-4}.$$

• Với  $x < 8$  (và  $x \geq 4$ ), ta có

$$A = \sqrt{x-4} + 2 + 2 - \sqrt{x-4} = 4.$$

**102.** Điều kiện xác định của A là  $x \geq 0$ .

Điều kiện xác định của B là  $x \geq 1$ .

a) Với điều kiện  $x \geq 0$ , ta có  $x+1 \geq 1$  nên  $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{1}$ .

Từ đó suy ra  $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} \geq 1$  hay A  $\geq 1$ .

Với điều kiện  $x \geq 1$  ta có  $x+4 \geq 1+4$  hay  $x+4 \geq 5$  nên  $\sqrt{x+4} \geq \sqrt{5}$ .

Từ đó suy ra  $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} \geq \sqrt{5}$  hay B  $\geq \sqrt{5}$ .

b) Áp dụng kết quả câu a) ta có

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} \geq 1.$$

Do đó, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{x} = 0 \text{ và } \sqrt{x+1} = 1.$$

Ta tìm được  $x = 0$ .

Theo kết quả câu a), ta có

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} \geq \sqrt{5},$$