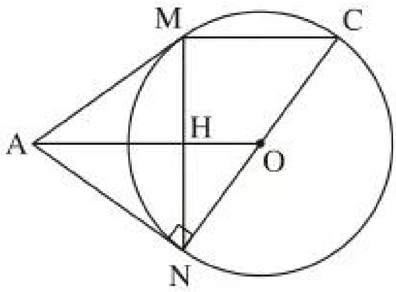
§6. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

48. (h.121)

a) AM = AN, AO là tia phân giác của góc A (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại A).

Tam giác AMN cân tại A, AO là tia phân giác của góc A nên AO $\perp$ MN.



Hình 121

b) Gọi H là giao điểm của MN và AO. Ta có MH = HN, CO = ON nên HO là đường trung bình của tam giác MNC. Suy ra HO // MC, do đó MC // AO.

c) $AN^2 = AO^2 - ON^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow AN = 4$(cm).

Ta có : AO.HN = AN.NO

$\Rightarrow$ 5.HN = 4.3 $\Rightarrow$ HN = 2,4 (cm).

Do đó MN = 4,8cm.

Vậy AM = AN = 4cm ; MN = 4,8cm.

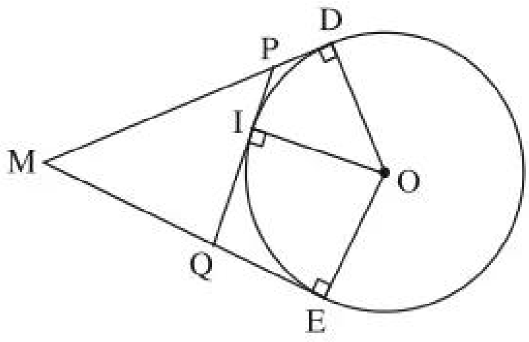
49. (h.122)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau,

PI = PD và QI = QE.

Chu vi tam giác MPQ bằng :

$$\begin{aligned} MP + PQ + MQ &= MP + PI + IQ + MQ \\ &= MP + PD + QE + MQ \\ &= MD + ME = 8(\text{cm}). \end{aligned}$$



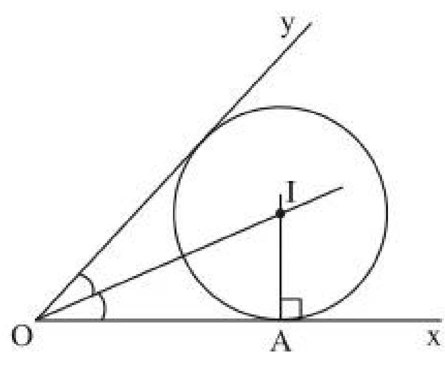
Hình 122

50. (h.123)

Phân tích. Giả sử đã dựng được đường tròn (I) đi qua A và tiếp xúc với Ox, Oy.

Đường tròn (I) tiếp xúc với Ox, Oy nên I nằm trên tia phân giác của góc xOy.

Đường tròn (I) tiếp xúc với Ox tại A nên I nằm trên đường thẳng vuông góc với Ox tại A.



Hình 123

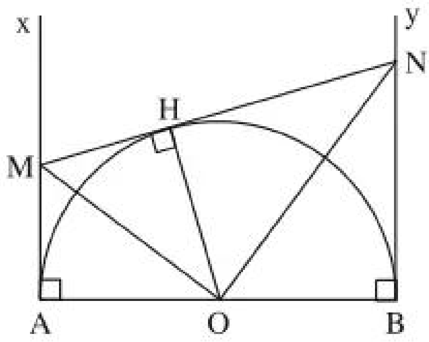
Giao điểm của hai đường trên cho ta điểm I.

Học sinh tự trình bày phần *Cách dựng* và *Chứng minh*.

51. (h.124)

a) Gọi H là tiếp điểm của MN với nửa đường tròn. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau :

OM là tia phân giác của góc AOH, ON là tia phân giác của góc BOH, hai góc đó kề bù nên $\widehat{MON} = 90^o$.



Hình 124

b) Cũng theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau :

$$AM = HM,\ BN = HN \qquad (1)$$

nên $MN = HM + HN = AM + BN$.

c) Từ (1) suy ra $AM.BN = HM.HN$.

Ta lại có $HM.HN = OH^2 = R^2$ (hệ thức lượng trong tam giác MON vuông tại O). Do đó $AM.BN = R^2$.

52. (h.125)

Gọi F là tiếp điểm của đường tròn (I) với BC. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau : $AD = AE$, $BE = BF$, $CF = CD$.

Ta có :

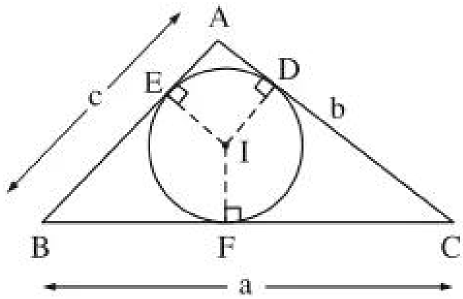
$AD + AE = AC + AB - (BE + CD)$

$= AC + AB - (BF + CF)$

$= AC + AB - BC$

$= b + c - a.$

Suy ra $AD = AE = \dfrac{b + c - a}{2}$.



Hình 125

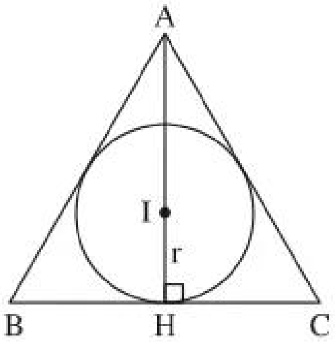
53. (h.126)

Gọi H là tiếp điểm của đường tròn (I) với BC. Đường phân giác AI cũng là đường cao nên A, I, H thẳng hàng, HB = HC,

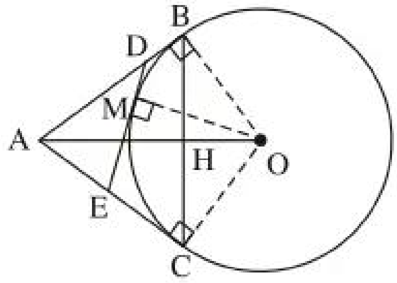
$$\widehat{HAC} = 30^o,\ AH = 3.IH = 3r.$$

$$HC = AH.\ tg30^o = 3r.\frac{1}{\sqrt{3}} = r.\sqrt{3}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = HC.AH = r\sqrt{3}.3r = 3\sqrt{3}\,r^2.$$



Hình 126



Hình 127

54. (h.127)

a) Tam giác ABC cân tại A có AO là tia phân giác của góc A nên $AO \perp BC$.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO :

$$OB^2 = OA.OH$$

$$\Rightarrow \quad 3^2 = 5.OH$$

$$\Rightarrow \quad OH = 1,8 \text{ (cm)}.$$

b) *Đáp số :* Chu vi tam giác ADE bằng 2AB = 8(cm).

55. (h.128)

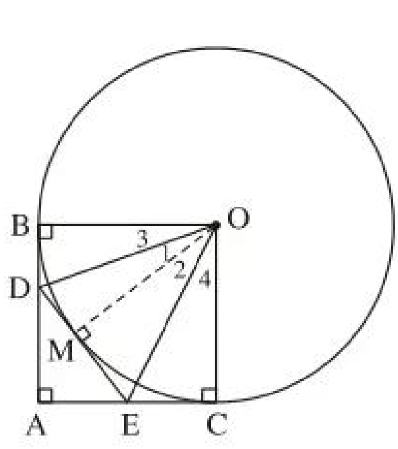
a) Tứ giác ABOC có ba góc vuông nên là hình chữ nhật, lại có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình vuông.

b) Chu vi tam giác ADE bằng

AB + AC = 4cm.

Chú ý : Có thể sử dụng kết quả của câu b) bài 54.

c) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau :



Hình 128

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = \frac{1}{2}\widehat{MOB},$$

$$\hat{O}_2 = \hat{O}_4 = \frac{1}{2}\widehat{MOC} \text{ nên } \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 45^o.$$

Vậy $\widehat{DOE} = 45^o$.

56. (h.129)

a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau :

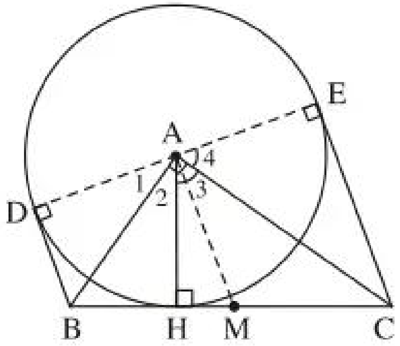
$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$ nên

$\widehat{DAH} + \widehat{HAE} = 2(\widehat{A}_2 + \widehat{A}_3) = 180^o$.

Vậy D, A, E thẳng hàng.

b) Gọi M là trung điểm của BC.

MA là đường trung bình của hình thang BDEC nên MA // BD. Do đó MA $\perp$ DE.

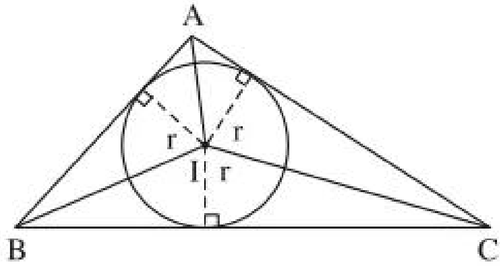


Hình 129

Ta lại có MA = MB = MC nên MA là bán kính của đường tròn có đường kính BC (tâm M). Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính BC.

57. (h.130)

Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có



Hình 130

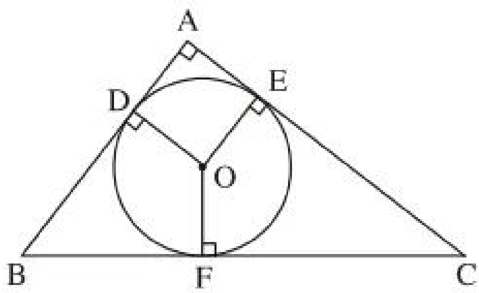
$$S_{ABC} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA}$$
$$= \frac{AB.r}{2} + \frac{BC.r}{2} + \frac{CA.r}{2}$$
$$= \left(\frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{CA}{2}\right).r$$
$$= pr.$$

58. (h.131)

a) Tứ giác ADOE là hình vuông.

b) Theo bài 52 ta có

$$AD = AE = \frac{AB + AC - BC}{2}.$$



Hình 131

Gọi r là bán kính đường tròn (O). Do ADOE là hình vuông nên AD = AE = r. Ta tính được BC = 5cm. Do đó

$$r = \frac{3 + 4 - 5}{2} = 1\,(cm).$$

59. (Vẫn dùng hình 131)

Ta có BC = 2R, AD = AE = r, nên

$$\begin{aligned} 2R + 2r &= BC + (AE + AD) \\ &= (BF + FC) + (AE + AD) \\ &= (DB + EC) + (AE + AD) \\ &= (AD + DB) + (AE + EC) \\ &= AB + AC. \end{aligned}$$

60. (h.132)

a) Gọi D là tiếp điểm của đường tròn (K) trên BC. Ta có BD = BE, CD = CF nên

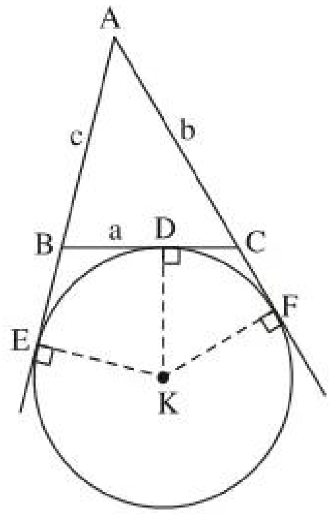
$$AE = AB + BE = c + BD$$
$$AF = AC + CF = b + CD.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} AE + AF &= b + c + (BD + CD) \\ &= a + b + c. \end{aligned}$$

Ta lại có AE = AF (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại A) nên

$$AE = AF = \frac{a + b + c}{2}.$$



Hình 132

b) $BE = AE - AB = \dfrac{a + b + c}{2} - c = \dfrac{a + b - c}{2}$.

c) $CF = AF - AC = \dfrac{a + b + c}{2} - b = \dfrac{a + c - b}{2}$.

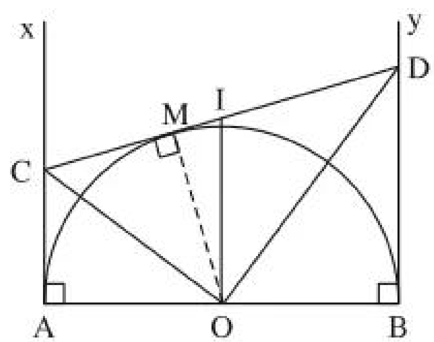
61. (h.133)

a) Ta có OC, OD là các tia phân giác của hai góc kề bù nên $\widehat{COD} = 90^o$. Gọi I là trung điểm của CD thì

$$IC = ID = IO$$

nên I là tâm và IO là bán kính của đường tròn có đường kính CD.

Hãy chứng minh tiếp AB vuông góc với IO tại O.



Hình 133

b) Chu vi hình thang ABDC bằng :

$$AB + AC + BD + CD.$$

Dễ dàng chứng minh được

$$AC + BD = CM + MD = CD$$

nên chu vi ABDC bằng AB + 2CD.

Ta có AB không đổi nên chu vi ABDC nhỏ nhất khi và chỉ khi CD nhỏ nhất.

CD nhỏ nhất $\Leftrightarrow CD = AB \Leftrightarrow CD \parallel AB \Leftrightarrow OM \perp AB$.

Vậy khi $OM \perp AB$ thì chu vi hình thang ABDC nhỏ nhất và bằng 3AB.

c) Đặt AC = x, BD = y. Chu vi ABDC bằng

$$AB + 2CD = 4 + 2(x + y).$$

Do chu vi ABDC bằng 14 nên

$$4 + 2(x + y) = 14$$

hay

$$x + y = 5. \qquad (1)$$

Ta lại có

$$xy = MC.MD$$

$$= OM^2 \text{ (hệ thức lượng trong tam giác vuông COD)}$$

nên $\quad xy = 2^2 = 4. \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$x + \frac{4}{x} = 5 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - 1)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 4.$$

Như vậy, nếu điểm C (thuộc tia Ax) cách điểm A là 1cm hoặc 4cm thì chu vi hình thang ABDC bằng 14cm.

62. (h.134)

a) Ta có Ax // By nên theo định lí Ta-lét :

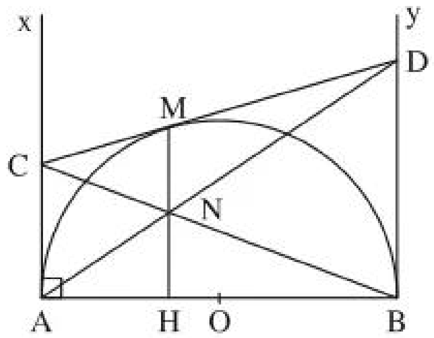
$$\frac{ND}{NA} = \frac{DB}{AC}. \qquad (1)$$

Ta lại có DB = MD, AC = MC. (2)

Từ (1) và (2) ta có

$\dfrac{ND}{NA} = \dfrac{MD}{MC}$, suy ra MN // AC (định lí Ta-lét đảo).

Do $AC \perp AB$ nên $MN \perp AB$.



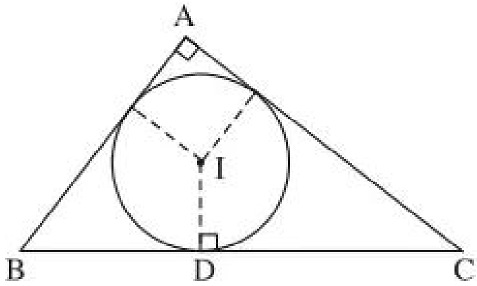
Hình 134

b) Theo định lí Ta-lét :

$$\frac{MN}{BD} = \frac{CN}{CB} = \frac{AN}{AD} = \frac{NH}{BD}.$$

Suy ra MN = NH.

63. (h.135)



Hình 135

Đặt BC = a, AC = b, AB = c. Ta có :

$$BD = \frac{a + c - b}{2}$$

$$DC = \frac{a + b - c}{2} \quad \text{(xem bài 52).}$$

Do đó (giả sử $b \geq c$) :

$$BD.\,DC = \frac{a + c - b}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} = \frac{a - (b - c)}{2} \cdot \frac{a + (b - c)}{2}$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{4} = \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{4}$$

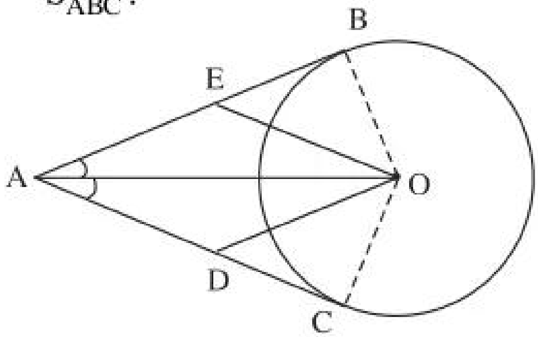
$$= \frac{a^2 - (b^2 + c^2) + 2bc}{4}.$$

Do $a^2 = b^2 + c^2$ nên $BD.DC = \frac{2bc}{4} = \frac{bc}{2} = S_{ABC}$.

Bài tập bổ sung

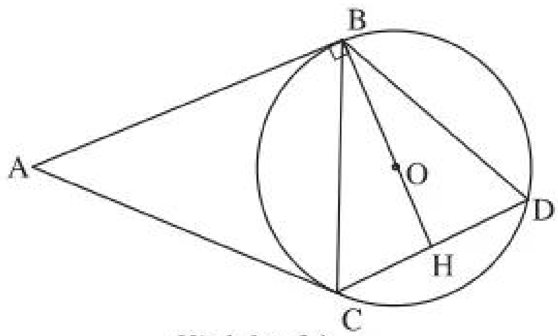
6.1. Chọn (B).

6.2. (h.bs.33) ADOE là hình bình hành, lại có AO là đường phân giác của góc A nên là hình thoi.



Hình bs. 33

6.3. (h.bs.34). Ta có $OB \perp AB$ và $AB \,//\, CD$ nên $OB \perp CD$. Gọi H là giao điểm của BO và CD thì $BH \perp CD$, suy ra HC = HD. Do đó BC = BD.



Hình bs. 34