

$$10 + \sqrt{3}x = (2 + \sqrt{6})^2 \text{ hay } 10 + \sqrt{3}x = 10 + 4\sqrt{6}.$$

Từ đó, tìm được $x = 4\sqrt{2}$.

c) Trước hết, nhận xét $2 - \sqrt{3} > 0$, nên đưa về tìm x thoả mãn

$$3x - 2 = (2 - \sqrt{3})^2.$$

Từ đó, tìm được $x = 3 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

d) Trước hết, nhận xét $\sqrt{5} - 3 < 0$ (vì $\sqrt{5} < 3$), do đó không có giá trị nào của x thoả mãn $\sqrt{x+1} = \sqrt{5} - 3$ (vẽ trái không âm, vẽ phải âm).

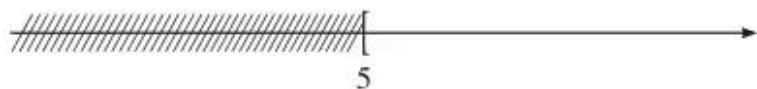
78. a) Với điều kiện $x - 2 \geq 0$ (tức $x \geq 2$), theo định lí so sánh các căn bậc hai số học, ta có

$$\sqrt{x-2} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow x - 2 \geq 3.$$

Giải bất phương trình $x - 2 \geq 3$ ta có $x \geq 5$.

Kết hợp điều kiện $x \geq 2$, ta có tập các giá trị x cần tìm là $x \geq 5$.

Biểu diễn tập hợp đó trên trực số, ta có hình 7.



Hình 7

b) Trước hết, điều kiện để căn thức xác định là $3 - 2x \geq 0$, tức là $x \leq 1,5$.

Với điều kiện $x \leq 1,5$, theo định lí so sánh các căn bậc hai số học, ta có

$$\sqrt{3 - 2x} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow 3 - 2x \leq 5.$$

Giải bất phương trình $3 - 2x \leq 5$ ta có $x \geq -1$.

Kết hợp điều kiện $x \leq 1,5$, ta có tập các giá trị x cần tìm là $-1 \leq x \leq 1,5$.

Biểu diễn tập hợp đó trên trực số, ta có hình 8.



Hình 8

79. a) Ta có

$$x + y = (a_1 + a_2)\sqrt{2} + (b_1 + b_2)$$

trong đó $a_1 + a_2$ và $b_1 + b_2$ là các số hữu tỉ (tổng hai số hữu tỉ là số hữu tỉ).

Khi đó, $x \cdot y = (a_1\sqrt{2} + b_1)(a_2\sqrt{2} + b_2)$.

Khai triển tích trên và nhóm gộp thích hợp, ta được

$$xy = (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} + (2a_1a_2 + b_1b_2).$$

Ta thấy $a_1b_2 + a_2b_1$ và $2a_1a_2 + b_1b_2$ đều là các số hữu tỉ.

b) Ta cần chỉ ra rằng nếu $y \neq 0$, thì $\frac{1}{y}$ cũng có dạng $a\sqrt{2} + b$ với a và b là các số hữu tỉ rồi áp dụng kết quả câu a).

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{a_2\sqrt{2} + b_2} &= \frac{a_2\sqrt{2} - b_2}{(a_2\sqrt{2} + b_2)(a_2\sqrt{2} - b_2)} \\ &= \frac{a_2}{2a_2^2 - b_2^2}\sqrt{2} - \frac{b_2}{2a_2^2 - b_2^2}. \end{aligned}$$

Vì $y \neq 0$ nên a_2 và b_2 không đồng thời bằng 0. Từ đó suy ra mâu $2a_2^2 - b_2^2 \neq 0$ (do a_2 và b_2 không đồng thời bằng 0, nếu $2a_2^2 - b_2^2 = 0$ thì suy ra $\sqrt{2} = \frac{b_2}{a_2}$, mâu thuẫn với $\sqrt{2}$ là số vô tỉ).

Vậy $\frac{1}{y}$ có dạng $a\sqrt{2} + b$ với a và b là số hữu tỉ.

Bài tập bổ sung

7.1. Chọn (A).

7.2. Chọn (D).

§8. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

80. a) $(2 - \sqrt{2})(-5\sqrt{2}) - (3\sqrt{2} - 5)^2 = -10\sqrt{2} + 5.2 - (18 - 30\sqrt{2} + 25).$

Đáp số: $-33 + 20\sqrt{2}.$

b) $2\sqrt{3a} - \sqrt{75a} + a\sqrt{\frac{13,5}{2a}} - \frac{2}{5}\sqrt{300a^3} =$
 $= 2\sqrt{3a} - 5\sqrt{3a} + \frac{a}{2a}\sqrt{27a} - \frac{2}{5}.10a\sqrt{3a}.$

Đáp số: $-(1,5 + 4a)\sqrt{3a}.$

81. a) *Giải:* $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$
 $= \frac{a + 2\sqrt{ab} + b + a - 2\sqrt{ab} + b}{a - b} = \frac{2(a + b)}{a - b};$

b) *Hướng dẫn.*

Cách 1: Quy đồng mẫu rồi rút gọn.

Cách 2: Trục căn thức của phân thức thứ nhất và sau đó trừ phân thức thứ hai.

Đáp số: $\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$, có thể để kết quả ở dạng $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

82. a) Khai triển vế phải được $x^2 + \sqrt{3}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$. Rút gọn sẽ được vế trái.

b) Giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{4}$ đạt được khi

$$\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0, \text{ tức là khi } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

83. a) Rút gọn biểu thức, ta được $\frac{-10}{9}$ là số hữu tỉ;

b) Rút gọn biểu thức, ta được 12 là số hữu tỉ.

84. a) *Hướng dẫn:* Đưa về tìm x thoả mãn

$$2\sqrt{x+5} - 3\sqrt{x+5} + 4\sqrt{x+5} = 6.$$

Điều kiện : $x \geq -5$.

Rút gọn, ta có $3\sqrt{x+5} = 6$ và tìm được $x = -1$.

b) *Đáp số* : $x = 17$.

85. a) *Giải* : Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4} \\ &= \frac{x+3\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}. \end{aligned}$$

b) *Hướng dẫn* : $P = 2$ khi và chỉ khi

$$\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2 \text{ hay } 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 4.$$

Từ đó tính được $x = 16$.

86. a) $Q = \frac{\sqrt{a} - (\sqrt{a} - 1)}{(\sqrt{a} - 1)\sqrt{a}} \cdot \frac{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1) - (\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 2)}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} - 1)}$
- $$= \frac{1}{(\sqrt{a} - 1)\sqrt{a}} \cdot \frac{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} - 1)}{a - 1 - (a - 4)} = \frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} \cdot 3}.$$

b) Với $a > 0$, ta có $\sqrt{a} > 0$. Vậy

$$Q = \frac{\sqrt{a} - 2}{3\sqrt{a}}$$

dương khi và chỉ khi $\sqrt{a} - 2 > 0$.

Giải $\sqrt{a} - 2 > 0$ ta có $\sqrt{a} > 2 \Leftrightarrow a > 4$.

Vậy Q dương khi $a > 4$.

87. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm ta có :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (1)$$