§8. Vị trí tương đối của hai đường tròn (tiếp theo)

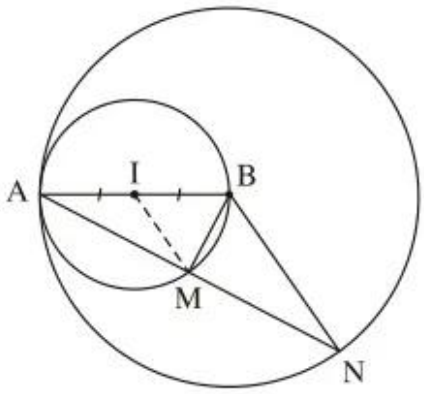
71. (h.143)

a) IB = BA – IA nên đường tròn (I) tiếp xúc trong với đường tròn (B).

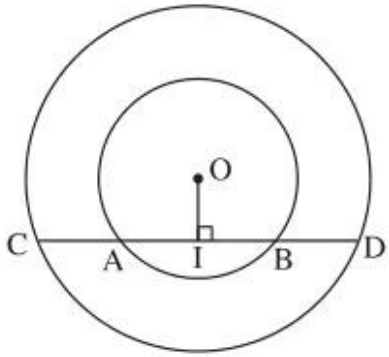
b) Tam giác AMB có đường trung tuyến MI ứng với cạnh AB bằng nửa cạnh AB nên $\widehat{AMB} = 90^o$.

Tam giác ABN cân tại B, có BM là đường cao nên cũng là đường trung tuyến.

Vậy AM = MN.



Hình 143



Hình 144

72. (h.144)

Kẻ OI ⊥ AB. Theo tính chất về đường kính vuông góc với dây ta có

IC = ID, IA = IB.

Suy ra IC – IA = ID – IB tức là AC = BD.

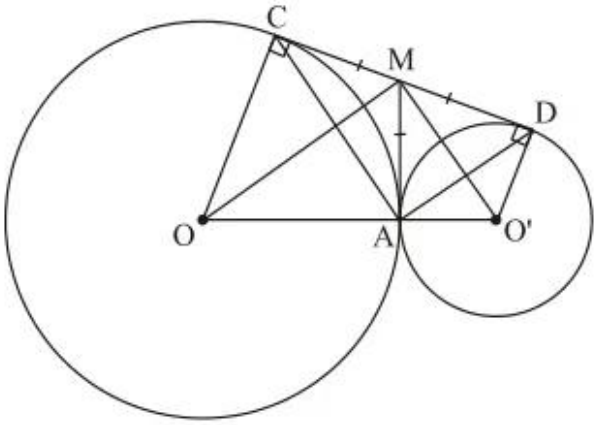
73. (h.145)

a) Kẻ tiếp tuyến chung tại A, cắt CD ở M. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau :

MA = MC, MA = MD.

Tam giác ACD có đường trung tuyến AM ứng với cạnh CD bằng nửa cạnh CD nên $\widehat{CAD} = 90^o$.

b) MO và MO' là các tia phân giác của hai góc kề bù AMC, AMD nên $\widehat{OMO'} = 90^o$.



Hình 145

Tam giác OMO' vuông tại M, MA là đường cao nên

$MA^2 = OA.O'A = 4,5.\ 2 = 9$, do đó MA = 3cm,

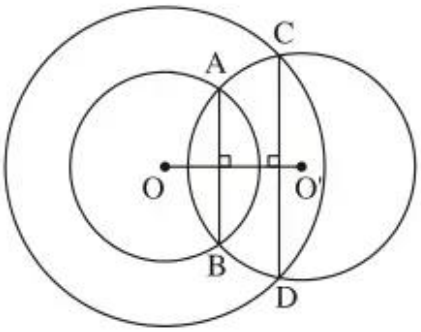
CD = 2MA = 6(cm).

74. (h.146)

Đường tròn (O') cắt đường tròn (O ; OA) tại A và B nên OO' ⊥ AB.

Đường tròn (O') cắt đường tròn (O ; OC) tại C và D nên OO' ⊥ CD.

Suy ra AB // CD.



Hình 146

75. (h.147)

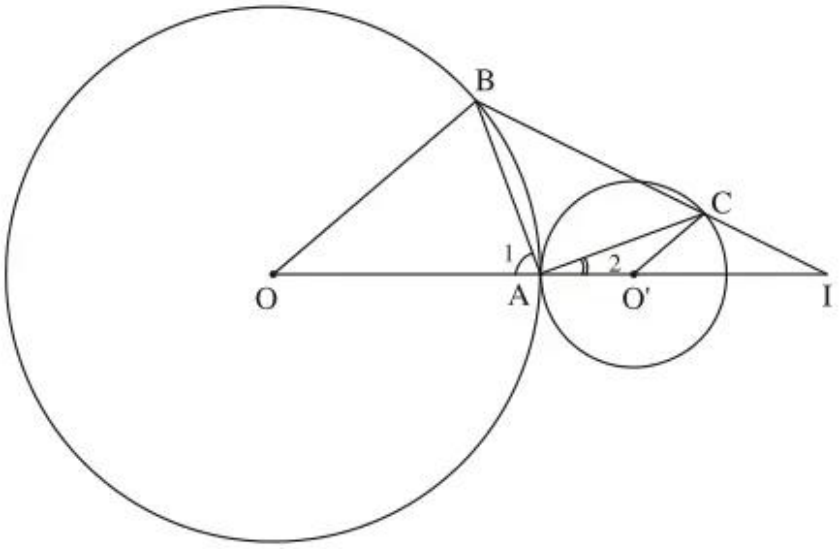
a) OB // O'C ⇒ $\widehat{AOB} + \widehat{AO'C} = 180^o$.

Mặt khác, tam giác AOB cân tại O, tam giác AO'C cân tại O' nên

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \frac{180^o - \widehat{AOB}}{2} + \frac{180^o - \widehat{AO'C}}{2} = \frac{360^o - (\widehat{AOB} + \widehat{AO'C})}{2}$$

$$= \frac{180^o}{2} = 90^o.$$

Vậy $\widehat{BAC} = 90^o$.



Hình 147

b) Xét tam giác IOB với O'C // OB. Theo định lí Ta-lét :

$$\frac{O'I}{OI} = \frac{O'C}{OB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{OI - O'I}{OI} = \frac{3-1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{OO'}{OI} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{OI} = \frac{2}{3}.$$

Vậy OI = 6cm.

76. (h.148)

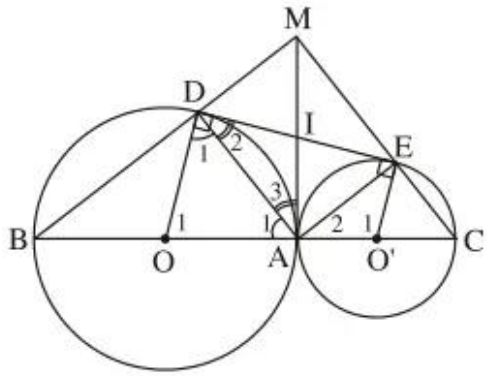
a) Vì OD // EO' $\Rightarrow \widehat{O}_1 + \widehat{O'}_1 = 180^o$.

Tam giác AOD cân tại O, tam giác AO'E cân tại O' nên

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \frac{180^o - \widehat{O}_1}{2} + \frac{180^o - \widehat{O'}_1}{2}$$

$$= \frac{360^o - (\widehat{O}_1 + \widehat{O'}_1)}{2}$$

$$= \frac{180^o}{2} = 90^o.$$



Hình 148

Suy ra $\widehat{DAE} = 90^o$.

b) Tam giác ABD nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $\widehat{ADB} = 90^o$.

Tương tự $\widehat{AEC} = 90^o$.

Tứ giác ADME có $\widehat{DAE} = 90^o$, $\widehat{ADM} = 90^o$, $\widehat{AEM} = 90^o$ nên là hình chữ nhật.

c) Tam giác AOD cân tại O nên $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$.

Gọi I là giao điểm các đường chéo của hình chữ nhật ADME, ta có $\widehat{A_3} = \widehat{D_2}$.

Suy ra $\widehat{A_1} + \widehat{A_3} = \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 90^o$.

MA vuông góc với AB tại A nên MA là tiếp tuyến của đường tròn (O), và cũng là tiếp tuyến của đường tròn (O').

77. (h.149)

a) Học sinh tự chứng minh.

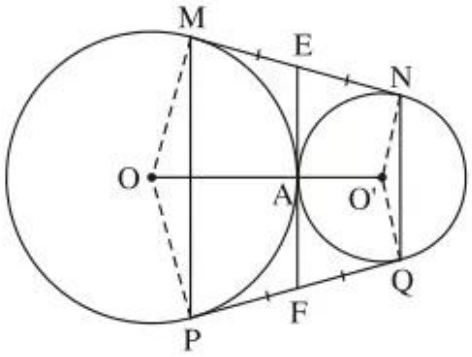
b) OO' là đường trung trực của MP nên OP = OM, do đó P thuộc đường tròn (O).

Ta có $\widehat{OMP} = \widehat{OPM}$. (1)

Ta có MNQP là hình thang cân nên $\widehat{NMP} = \widehat{QPM}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OMN} = \widehat{OPQ}$.

Do $\widehat{OMN} = 90^o$ nên $\widehat{OPQ} = 90^o$. Vậy PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O). Tương tự, PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O').



Hình 149

c) Kẻ tiếp tuyến chung tại A, cắt MN và PQ theo thứ tự ở E và F. Ta có EM = EA = EN, FP = FA = FQ.

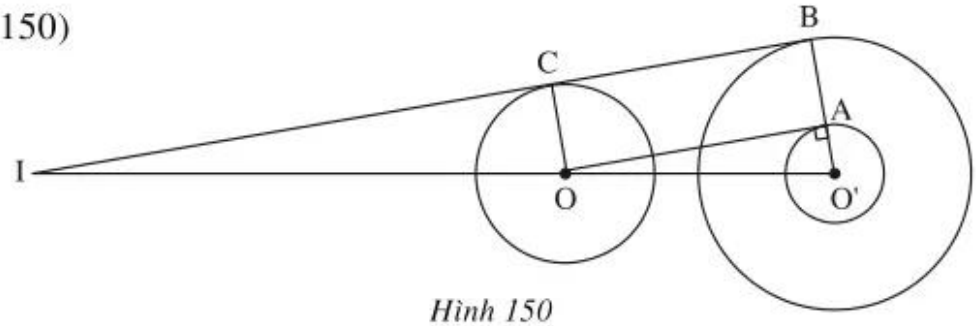
Do đó MN + PQ = 2EF. (3)

EF là đường trung bình của hình thang MNQP nên

MP + NQ = 2EF. (4)

Từ (3) và (4) suy ra MN + PQ = MP + NQ.

78. (h.150)



Hình 150

a) OO' = 6 > 2 + 3 nên hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau.

b) Tứ giác ABCO có AB // CO, AB = CO nên là hình bình hành, lại có $\widehat{A} = 90^o$ nên là hình chữ nhật.

Suy ra $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^o$. Do đó BC là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O ; 2cm) và (O' ; 3cm).

c) Tính OA trong tam giác OO'A vuông tại A, được OA = $\sqrt{35}$, do đó

$$BC = \sqrt{35}\text{ (cm)}.$$

d) OC // O'B nên theo định lí Ta-lét :

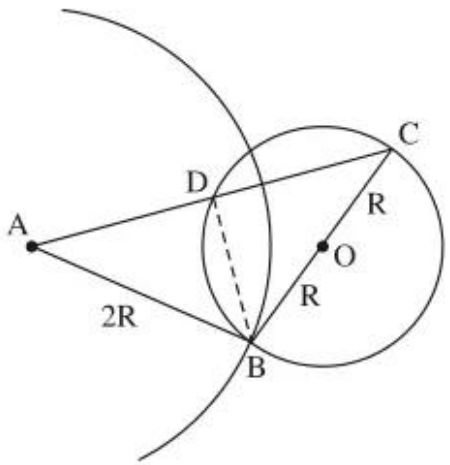
$$\frac{IO}{IO'} = \frac{OC}{O'B} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{IO}{IO' - IO} = \frac{2}{3-2}$$

$$\Rightarrow \frac{IO}{OO'} = \frac{2}{1} \Rightarrow IO = 2.OO' = 12\text{(cm)}.$$

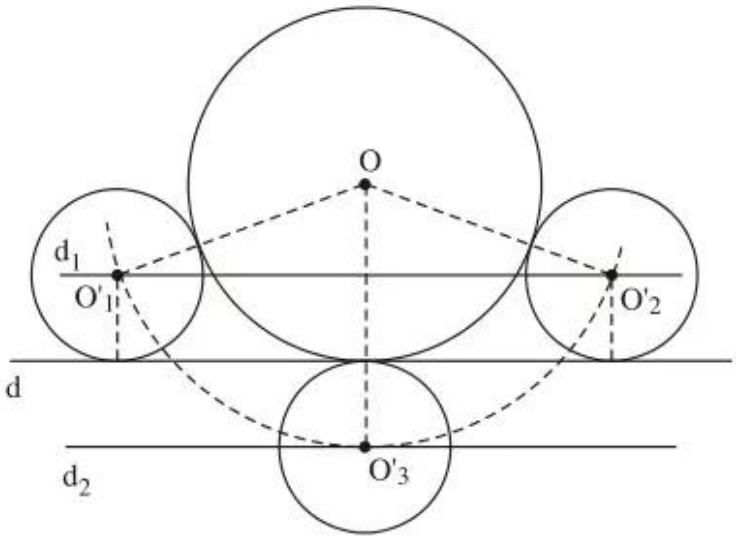
79. (h.151)

a) Vì đường tròn tâm O có bán kính bằng R, đường tròn tâm A có bán kính bằng 2R và theo giả thiết ta có 2R − R < OA < 2R + R, nên hai đường tròn (A) và (O) cắt nhau.

b) Tam giác ABC có AB = BC nên là tam giác cân. Ta lại chứng minh được BD ⊥ AC nên AD = DC.



Hình 151



Hình 152

80. (h.152)

Phân tích. Giả sử đã dựng được đường tròn (O' ; 1cm) tiếp xúc với đường thẳng d và tiếp xúc ngoài với đường tròn (O ; 2cm).

(O') tiếp xúc với d nên O' thuộc hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với d và cách d là 1cm.

(O') tiếp xúc ngoài với (O) nên O' thuộc đường tròn tâm O bán kính 2 + 1 = 3 (cm).

Bài toán có ba nghiệm hình (xem hình 152).

Học sinh tự trình bày phần *Cách dựng* và *Chứng minh*.

Bài tập bổ sung

8.1.

R	r	OO'	Hệ thức giữa OO', R, r	Vị trí tương đối của (O) và (O')
3	1	2	OO' = R − r	Tiếp xúc trong
3	1	4	OO' = R + r	Tiếp xúc ngoài
3	1	3,5	R − r < OO' < R + r	Cắt nhau
3	1	5	OO' > R + r	Ở ngoài nhau
3	1	1	OO' < R − r	(O) đựng (O')

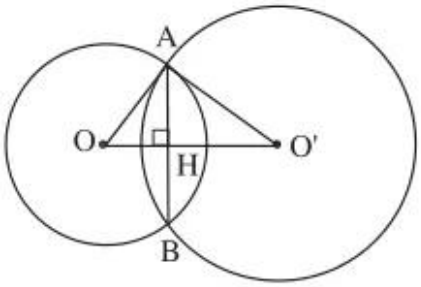
8.2. (h.bs.36)

a) (O) và (O') cắt nhau.

b) Gọi A và B là giao điểm của hai đường tròn (O) và (O'), H là giao điểm của AB và OO'.

Tam giác AOO' vuông tại A, AH ⊥ OO' và AB = 2AH.

Ta tính được AH = 2,4cm nên AB = 4,8cm.

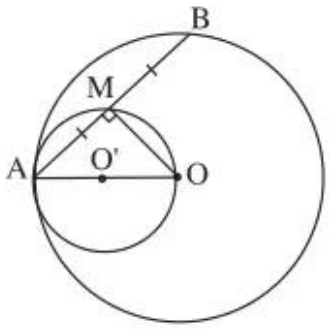


Hình bs. 36

8.3. (h.bs.37)

a) $\widehat{AMO} = 90^o$. Điểm M chuyển động trên đường tròn (O') đường kính AO.

b) Đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O).



Hình bs. 37