

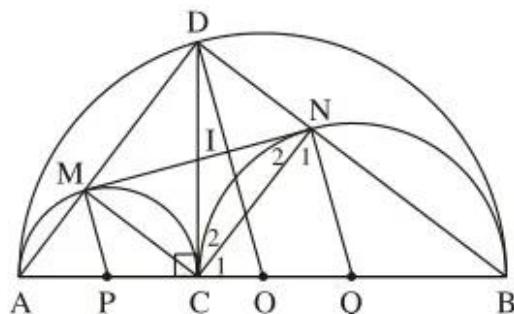
Ôn tập chương II

81. (h.153)

a) Gọi P, Q, O theo thứ tự là trung điểm của AC, CB, AB ; đó là tâm của các đường tròn có đường kính là AC, CB, AB.

Tam giác AMC nội tiếp đường tròn đường kính AC nên

$$\widehat{AMC} = 90^\circ.$$



Hình 153

Tương tự, $\widehat{CNB} = 90^\circ$, $\widehat{ADB} = 90^\circ$. Tứ giác DMCN có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

b) Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ACD :

$$DM \cdot DA = DC^2. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự} \quad DN \cdot DB = DC^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$DM \cdot DA = DN \cdot DB.$$

c) Tam giác QCN cân tại Q nên

$$\hat{C}_1 = \hat{N}_1$$

Tam giác ICN cân tại I nên

$$\hat{C}_2 = \hat{N}_2.$$

Suy ra $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \hat{N}_1 + \hat{N}_2$, tức là $\widehat{ICQ} = \widehat{INQ}$.

Do $\widehat{ICQ} = 90^\circ$ nên $\widehat{INQ} = 90^\circ$, do đó MN là tiếp tuyến của đường tròn (Q).

Tương tự, MN là tiếp tuyến của đường tròn (P).

d) Ta có $MN = DC$ (đường chéo của hình chữ nhật DMCN)

mà $DC \leq OD$ nên $MN \leq OD$ (OD không đổi).

$MN = OD$ khi và chỉ khi C trùng O.

Vậy khi C là trung điểm của AB thì MN có độ dài lớn nhất.

82. (h.154)

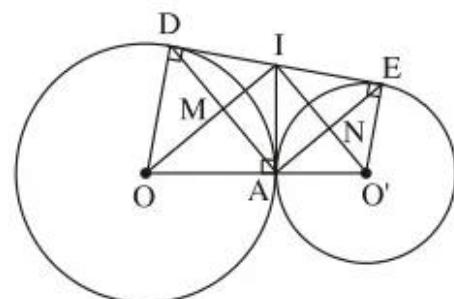
a) IO, IO' là tia phân giác của hai góc kề bù AID và AIE nên $\widehat{OIO'} = 90^\circ$.

Tam giác AID cân tại I, IM là tia phân giác của góc AID nên $IM \perp AD$.

Tương tự $IN \perp AE$.

Tứ giác $AMIN$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Hình 154



b) Chứng minh rằng $IM \cdot IO$ và $IN \cdot IO'$ cùng bằng IA^2 .

c) IA là bán kính của đường tròn tâm I có đường kính DE . Do OO' vuông góc với IA tại A nên OO' là tiếp tuyến của đường tròn (I).

d) Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OIO' :

$$IA^2 = OA \cdot O'A = 5 \cdot 3,2 = 16 \Rightarrow IA = 4(\text{cm}).$$

Do đó $DE = 2 \cdot IA = 8(\text{cm})$.

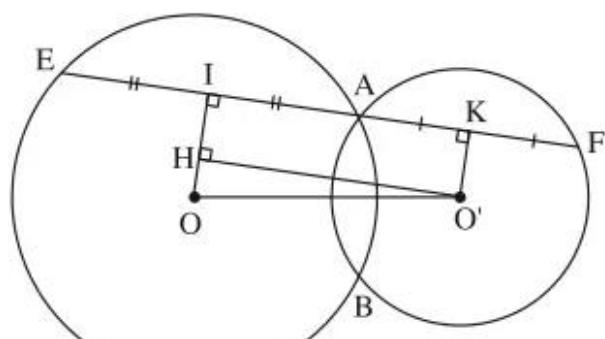
83. (h.155)

Kẻ OI và $O'K$ vuông góc với EF . Ta có

$$AI = IE = \frac{AE}{2},$$

$$AK = KF = \frac{AF}{2},$$

nên



Hình 155

$$EF = AE + AF = 2(AI + AK) = 2IK. \quad (1)$$

Kẻ $O'H \perp OI$, ta có

$$IK = O'H \leq OO' = 3\text{cm}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $EF \leq 6\text{cm}$.

$EF = 6\text{cm}$ khi và chỉ khi H trùng O , tức là $EF // OO'$.

Vậy EF có độ dài lớn nhất bằng 6cm khi và chỉ khi $EF // OO'$.

84. (h.156)

a) $OB \perp AD$ (tại I) nên $AI = ID$.

Suy ra tam giác BAD cân, $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$,
do đó $\hat{B}_3 = \hat{B}_4$.

Tam giác EBF có đường cao cũng là
đường phân giác nên là tam giác cân.

b) Tam giác EBF cân nên

$$EH = HF.$$

Tam giác AEF vuông tại A có AH
là đường trung tuyến nên

$$AH = HE = HF.$$

Do đó tam giác HAF cân tại H .

c) Tam giác HAF cân tại H nên

$$\hat{A}_1 = \hat{F}. \quad (1)$$

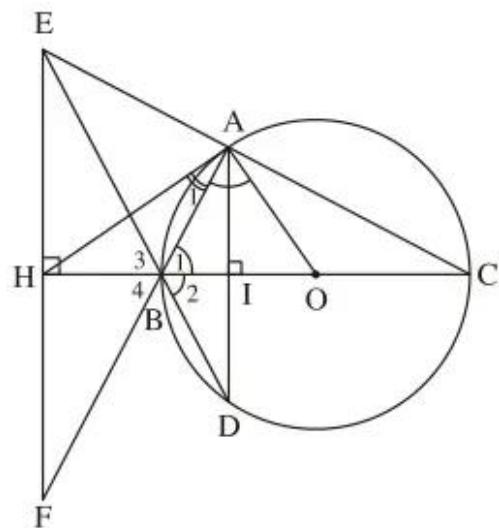
Tam giác OAB cân tại O nên

$$\widehat{OAB} = \hat{B}_1 = \hat{B}_4. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{OAH} = \hat{A}_1 + \widehat{OAB} = \hat{F} + \hat{B}_4 = 90^\circ.$$

Suy ra HA là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



Hình 156

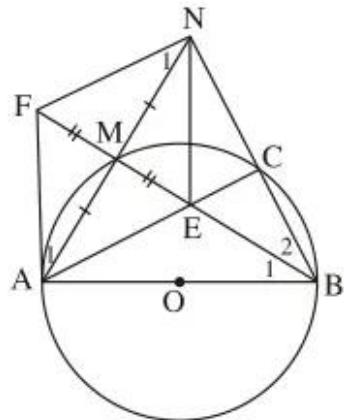
85. (h.157)

a) Chứng minh rằng $\widehat{AMB} = 90^\circ$, $\widehat{ACB} = 90^\circ$ nên E là trực tâm của tam giác NAB, do đó $NE \perp AB$.

b) Tứ giác AFNE có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành (tứ giác này còn là hình thoi). Do đó $FA \parallel NE$. Do $NE \perp AB$ nên $FA \perp AB$.

Suy ra FA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Hình 157



c) Tam giác ABN có đường cao BM cũng là đường trung tuyến nên là tam giác cân. Suy ra $BN = BA$. Do đó BN là bán kính của đường tròn (B ; BA).

Tam giác ABN cân tại B nên $\widehat{BNA} = \widehat{BAN}$. (1)

Tam giác AFN có đường cao FM là đường trung tuyến nên là tam giác cân, suy ra

$$\widehat{N_1} = \widehat{A_1}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BNA} + \widehat{N_1} = \widehat{BAN} + \widehat{A_1}$ tức là $\widehat{FNB} = \widehat{FAB}$.

Ta lại có $\widehat{FAB} = 90^\circ$ (câu b)), nên $\widehat{FNB} = 90^\circ$.

Do đó FN là tiếp tuyến của đường tròn (B).

86. (h.158)

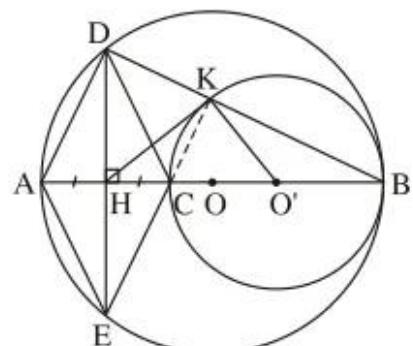
a) Đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) vì $OO' = OB - O'B$.

b) Tứ giác ADCE có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành, lại có $AC \perp DE$ nên là hình thoi.

c) Chứng minh CK và AD cùng vuông góc với BD, từ đó suy ra CK // AD.

Mặt khác, ta có CE // AD vì là các cạnh đối của hình thoi.

Qua C ta có CK // AD và CE // AD nên các đường thẳng CK, CE trùng nhau (theo tiên đề O-clit). Do đó ba điểm E, C, K thẳng hàng.



Hình 158

d) Tam giác DKE vuông có KH là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $KH = HE = HD$, do đó tam giác KHE cân tại H, suy ra

$$\widehat{HKC} = \widehat{HEC}. \quad (1)$$

Tam giác O'KC cân tại O' nên

$$\widehat{O'KC} = \widehat{OCK} = \widehat{ECH}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{HKC} + \widehat{O'KC} = \widehat{HEC} + \widehat{ECH} = 90^\circ.$$

Vậy $\widehat{HKO'} = \widehat{HKC} + \widehat{O'KC} = 90^\circ$. Do đó HK là tiếp tuyến của đường tròn (O').

87. (h.159)

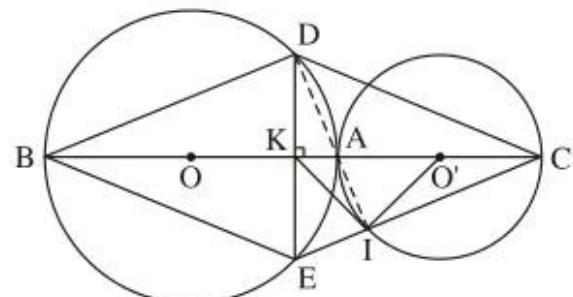
a) Tứ giác BDCE có

$$BK = KC, DK = KE$$

nên là hình bình hành, lại có
 $BC \perp DE$ nên là hình thoi.

b) Chứng minh $AD \perp BD, AI \perp IC$

(tức là $AI \perp EC$).



Hình 159

Mặt khác, ta có $BD \parallel EC$ vì là các cạnh đối của hình thoi.

Các đường thẳng AD, AI cùng đi qua A và vuông góc với hai đường thẳng song song (BD, EC) nên A, D và I thẳng hàng.

c) Tam giác DIE vuông có IK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên

$$IK = KD = KE,$$

do đó

$$\widehat{KIA} = \widehat{KDA}. \quad (1)$$

Tam giác O'IA cân tại O' nên $\widehat{O'IA} = \widehat{O'AI} = \widehat{DAK}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{KIA} + \widehat{O'IA} = \widehat{KDA} + \widehat{DAK} = 90^\circ.$$

Do đó $\widehat{KIO'} = \widehat{KIA} + \widehat{O'IA} = 90^\circ$. Vậy KI là tiếp tuyến của đường tròn (O').

88. (h.160)

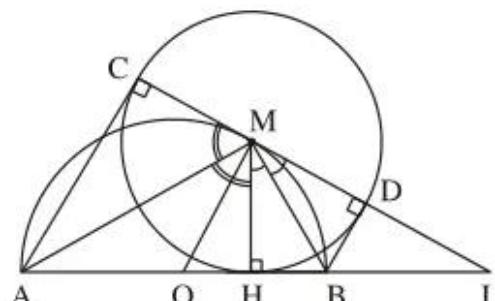
a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có :

$$\widehat{HMD} = 2\widehat{HMB},$$

$$\widehat{HMC} = 2\widehat{HMA}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\widehat{HMD} + \widehat{HMC} &= 2(\widehat{HMB} + \widehat{HMA}) \\ &= 2\widehat{AMB} = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.\end{aligned}$$



Hình 160

Do đó C, M, D thẳng hàng.

Hình thang ABDC có O là trung điểm của AB, M là trung điểm của CD nên OM là đường trung bình, suy ra OM // AC.

Ta lại có AC ⊥ CD nên OM ⊥ CD. Vậy CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) $AC + BD = AH + BH = AB$ không đổi.

c) OM là đường trung bình của hình thang ACDB nên OM // BD, suy ra OM ⊥ CD.

Theo hệ thức lượng trong tam giác MOI vuông tại M :

$$OH \cdot OI = OM^2 \text{ không đổi (vì OM bằng bán kính của đường tròn tâm O).}$$

Bài tập bổ sung

II.1. Chọn (B).

II.2. (h. bs. 38)

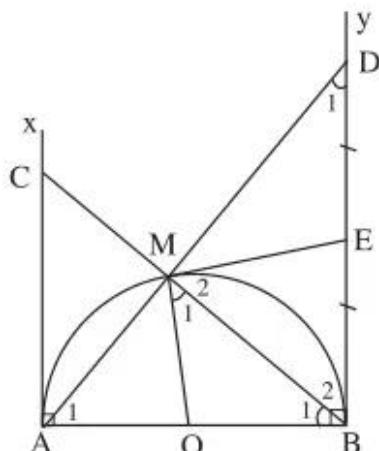
a) $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (cùng phụ với $\widehat{A_1}$).

$\Delta ABC \sim \Delta BDA$ (g.g) suy ra

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{AB}, \text{ do đó } AC \cdot BD = AB^2.$$

b) Tam giác EBM cân nên $\widehat{M_2} = \widehat{B_2}$.

Suy ra $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 90^\circ$, tức là $ME \perp OM$ tại M. Vậy ME là tiếp tuyến của nửa đường tròn.



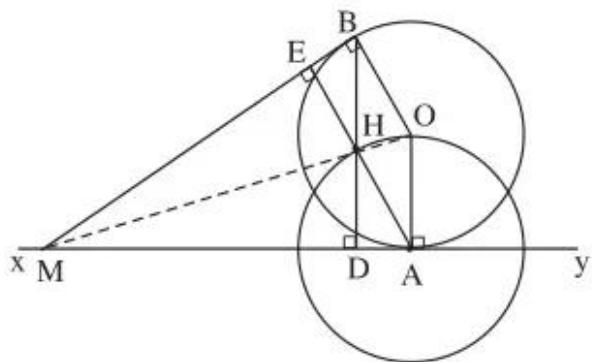
Hình bs. 38

II.3. (h.bs.39)

a) Gọi BD, AE là các đường cao của ΔMAB . Ta có $\Delta MAE = \Delta MBD$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $ME = MD$, $\Delta MHE = \Delta MHD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) nên $\widehat{EMH} = \widehat{DMH}$. MH và MO đều là tia phân giác của góc AMB nên M, H, O thẳng hàng.

b) Tứ giác $AOBH$ có $BH // OA$, $AH // OB$ và $OA = OB$ nên là hình thoi.

c) H cách A cố định một khoảng bằng OA không đổi nên H di chuyển trên đường tròn ($A ; AO$).



Hình bs. 39