§1 BẤT ĐẲNG THỨC

I – ÔN TẬP BẤT ĐẲNG THỨC

1. Khái niệm bất đẳng thức

1

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

a) $3,25 < 4$;

b) $-5 > -4\frac{1}{4}$;

c) $-\sqrt{2} \leq 3$?

2

Chọn dấu thích hợp (=, <, >) để khi điền vào ô vuông ta được một mệnh đề đúng.

a) $2\sqrt{2}$ $\square$ 3 ;

b) $\frac{4}{3}$ $\square$ $\frac{2}{3}$;

c) $3 + 2\sqrt{2}$ $\square$ $(1 + \sqrt{2})^2$;

d) $a^2 + 1$ $\square$ 0 với a là một số đã cho.

> *Các mệnh đề dạng "$a < b$" hoặc "$a > b$" được gọi là **bất đẳng thức**.*

2. Bất đẳng thức hệ quả và bất đẳng thức tương đương

> *Nếu mệnh đề "$a < b \Rightarrow c < d$" đúng thì ta nói bất đẳng thức $c < d$ là **bất đẳng thức hệ quả** của bất đẳng thức $a < b$ và cũng viết là $a < b \Rightarrow c < d$.*

Chẳng hạn, ta đã biết

$a < b$ và $b < c \Rightarrow a < c$ (tính chất bắc cầu).

$a < b$, c tuỳ ý $\Rightarrow a + c < b + c$ (tính chất cộng hai vế bất đẳng thức với một số).

*Nếu bất đẳng thức $a < b$ là hệ quả của bất đẳng thức $c < d$ và ngược lại thì ta nói hai **bất đẳng thức tương đương** với nhau và viết là $a < b \Leftrightarrow c < d$.*

3
Chứng minh rằng $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$.

3. Tính chất của bất đẳng thức

Như vậy để chứng minh bất đẳng thức $a < b$ ta chỉ cần chứng minh $a - b < 0$. Tổng quát hơn, khi so sánh hai số, hai biểu thức hoặc chứng minh một bất đẳng thức, ta có thể sử dụng các tính chất của bất đẳng thức được tóm tắt trong bảng sau

Tính chất		***Tên gọi***
Điều kiện	***Nội dung***	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều
$n \in \mathbb{N}^*$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một luỹ thừa
$n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	

4
Nêu ví dụ áp dụng một trong các tính chất trên.

CHÚ Ý

Ta còn gặp các mệnh đề dạng $a \le b$ hoặc $a \ge b$. Các mệnh đề dạng này cũng được gọi là bất đẳng thức. Để phân biệt, ta gọi chúng là các ***bất đẳng thức không ngặt*** và gọi các bất đẳng thức dạng $a < b$ hoặc $a > b$ là các ***bất đẳng thức ngặt***. Các tính chất nêu trong bảng trên cũng đúng cho bất đẳng thức không ngặt.

II – BẤT ĐẲNG THỨC GIỮA TRUNG BÌNH CỘNG VÀ TRUNG BÌNH NHÂN (BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI)

1. Bất đẳng thức Cô-si(*)

ĐỊNH LÍ

Trung bình nhân của hai số không âm nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của chúng.

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}, \quad \forall a, b \ge 0. \qquad (1)$$

Đẳng thức $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$ *xảy ra khi và chỉ khi* $a = b$.

Chứng minh

Ta có $\quad \sqrt{ab} - \dfrac{a+b}{2} = -\dfrac{1}{2}(a + b - 2\sqrt{ab}) = -\dfrac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \le 0.$

Vậy $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$, tức là khi và chỉ khi $a = b$.

2. Các hệ quả

HỆ QUẢ 1

Tổng của một số dương với nghịch đảo của nó lớn hơn hoặc bằng 2.

$$a + \frac{1}{a} \ge 2, \quad \forall a > 0.$$

(*) Augustin Louis – Cauchy, 1789 – 1857.

HỆ QUẢ 2

Nếu x, y cùng dương và có tổng không đổi thì tích xy lớn nhất khi và chỉ khi $x = y$.

Chứng minh. Đặt $S = x + y$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

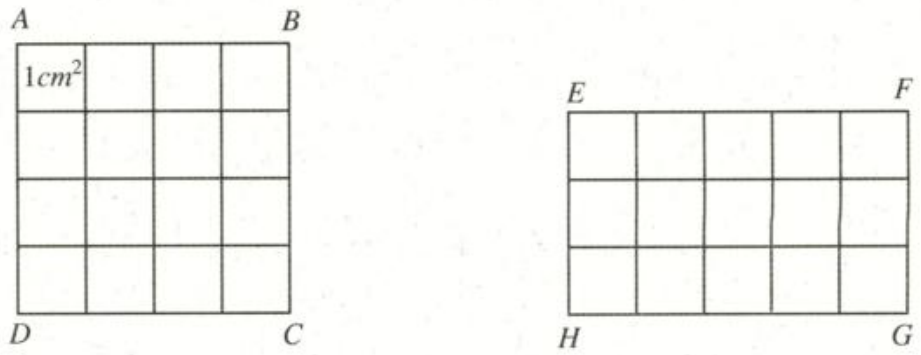
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{S}{2}, \text{ do đó } xy \leq \frac{S^2}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{S}{2}$.

Vậy tích xy đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{S^2}{4}$ khi và chỉ khi $x = y = \frac{S}{2}$.

Ý NGHĨA HÌNH HỌC

Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất (h.26).



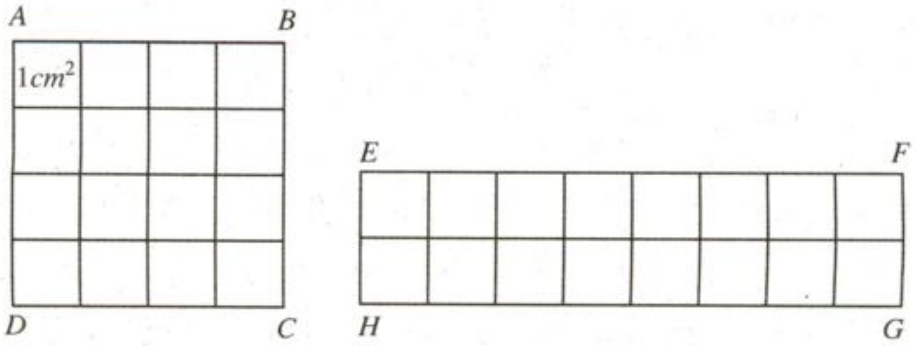
Hình 26

HỆ QUẢ 3

Nếu x, y cùng dương và có tích không đổi thì tổng $x + y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y$.

Ý NGHĨA HÌNH HỌC

Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất (h.27).



Hình 27

5
Hãy chứng minh hệ quả 3.

III – BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

6
Nhắc lại định nghĩa giá trị tuyệt đối và tính giá trị tuyệt đối của các số sau

a) 0 ; b) 1,25 ; c) $-\frac{3}{4}$; d) $-\pi$.

Từ định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta có các tính chất cho trong bảng sau

Điều kiện	***Nội dung***
	$\lvert x\rvert \geq 0, \lvert x\rvert \geq x,\ \lvert x\rvert \geq -x$
$a > 0$	$\lvert x\rvert \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
	$\lvert x\rvert \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ hoặc $x \geq a$
	$\lvert a\rvert - \lvert b\rvert \leq \lvert a + b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$

Ví dụ. Cho $x \in [-2\ ;\ 0]$. Chứng minh rằng $\lvert x + 1\rvert \leq 1$.

Giải

$$x \in [-2\ ;\ 0] \Rightarrow -2 \leq x \leq 0$$
$$\Rightarrow -2 + 1 \leq x + 1 \leq 0 + 1$$
$$\Rightarrow -1 \leq x + 1 \leq 1$$
$$\Rightarrow \lvert x + 1\rvert \leq 1.$$

Bài tập

1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng với mọi giá trị của x ?

a) $8x > 4x$; b) $4x > 8x$;

c) $8x^2 > 4x^2$; d) $8 + x > 4 + x$.

2. Cho số $x > 5$, số nào trong các số sau đây là số nhỏ nhất ?

$A = \frac{5}{x}$; $B = \frac{5}{x} + 1$; $C = \frac{5}{x} - 1$; $D = \frac{x}{5}$.

3. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

a) Chứng minh $(b - c)^2 < a^2$;

b) Từ đó suy ra $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

4. Chứng minh rằng

$$x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2, \forall x \geq 0, \forall y \geq 0.$$

5. Chứng minh rằng

$$x^4 - \sqrt{x^5} + x - \sqrt{x} + 1 > 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Hướng dẫn. Đặt $\sqrt{x} = t$, xét hai trường hợp $0 \leq x < 1$; $x \geq 1$.

6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, trên các tia Ox và Oy lần lượt lấy các điểm A và B thay đổi sao cho đường thẳng AB luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O bán kính 1. Xác định toạ độ của A và B để đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

CHỈ DẪN LỊCH SỬ

A. CÔ-SI
(Augustin Louis Cauchy, 1789 – 1857)

Cô-si là nhà toán học Pháp. Ông nghiên cứu nhiều lĩnh vực Toán học khác nhau, công bố hơn 800 công trình về Số học, Lí thuyết số, Đại số, Giải tích toán học, Phương trình vi phân, Cơ học lí thuyết, Cơ học thiên thể, Vật lí toán.

Các công trình của Cô-si cho thấy rõ nhược điểm của việc dựa vào trực giác hình học để suy ra các kết quả tế nhị của Giải tích. Ông định nghĩa một cách chính xác các khái niệm giới hạn và liên tục của hàm số. Ông xây dựng một cách chặt chẽ Lí thuyết hội tụ của chuỗi, đưa ra khái niệm bán kính hội tụ.

Ông định nghĩa tích phân là giới hạn của các tổng tích phân và chứng minh sự tồn tại tích phân của các hàm số liên tục. Ông phát triển cơ sở của Lí thuyết hàm số biến số phức. Về Hình học, về Đại số, về Lí thuyết số, về Cơ học, về Quang học, về Thiên văn học, Cô-si đều có những cống hiến lớn lao.