§4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Ta cũng gặp những bất phương trình nhiều ẩn số, chẳng hạn

$$2x + y^3 - z < 3 \; ; \; 3x + 2y < 1 .$$

Khi $x = -2$, $y = 1$, $z = 0$ thì vế trái bất phương trình thứ nhất có giá trị nhỏ hơn vế phải của nó, ta nói bộ ba số $(x ; y ; z) = (-2 ; 1 ; 0)$ là một nghiệm của bất phương trình này.

Tương tự, cặp số $(x ; y) = (1 ; -2)$ là một nghiệm của bất phương trình thứ hai.

> ***Bất phương trình bậc nhất hai ẩn*** *x, y có dạng tổng quát là*
> $$ax + by \leq c \qquad (1)$$
> $$(ax + by < c \ ; \ ax + by \geq c \ ; \ ax + by > c)$$
> *trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.*

II – BIỂU DIỄN TẬP NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Cũng như bất phương trình bậc nhất một ẩn, các bất phương trình bậc nhất hai ẩn thường có vô số nghiệm và để mô tả tập nghiệm của chúng, ta sử dụng phương pháp biểu diễn hình học.

> *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm bất phương trình (1) được gọi là* ***miền nghiệm*** *của nó.*

Người ta đã chứng minh được rằng trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đường thẳng $ax + by = c$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng, một trong hai nửa mặt phẳng đó là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$, nửa mặt phẳng kia là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \geq c$.

Từ đó ta có *quy tắc thực hành* ***biểu diễn hình học tập nghiệm*** (hay ***biểu diễn miền nghiệm***) của bất phương trình $ax + by \leq c$ như sau (tương tự cho bất phương trình $ax + by \geq c$)

Bước 1. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ đường thẳng Δ *:*

$$ax + by = c.$$

Bước 2. Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ *không thuộc* Δ *(ta thường lấy gốc toạ độ O)*

Bước 3. Tính $ax_0 + by_0$ *và so sánh* $ax_0 + by_0$ *với c.*

Bước 4. Kết luận

Nếu $ax_0 + by_0 < c$ *thì nửa mặt phẳng bờ* Δ *chứa* M_0 *là miền nghiệm của* $ax + by \leq c$.

Nếu $ax_0 + by_0 > c$ *thì nửa mặt phẳng bờ* Δ *không chứa* M_0 *là miền nghiệm của* $ax + by \leq c$.

CHÚ Ý

Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ là miền nghiệm của bất phương trình

$$ax + by < c.$$

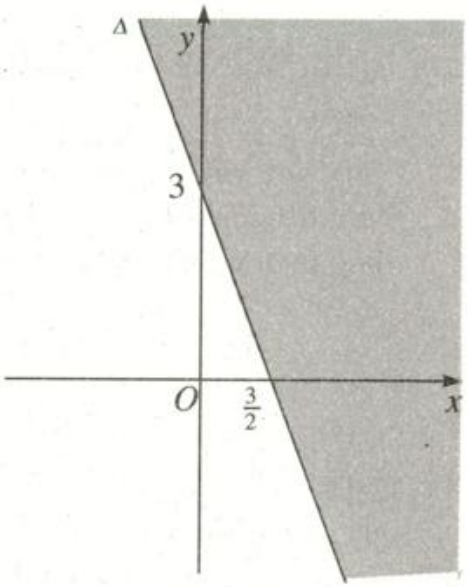
Ví dụ 1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$2x + y \leq 3.$$

Giải

Vẽ đường thẳng $\Delta : 2x + y = 3$.

Lấy gốc toạ độ $O(0 ; 0)$, ta thấy $O \notin \Delta$ và có $2.0 + 0 < 3$ nên nửa mặt phẳng bờ Δ chứa gốc toạ độ O là miền nghiệm của bất phương trình đã cho (miền không bị tô đậm trong hình 29).



Hình 29

1

Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$-3x + 2y > 0.$$

III – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Tương tự hệ bất phương trình một ẩn

> ***Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn*** *gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.*
>
> *Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể* ***biểu diễn hình học tập nghiệm*** *của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.*

Ví dụ 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Giải. Vẽ các đường thẳng

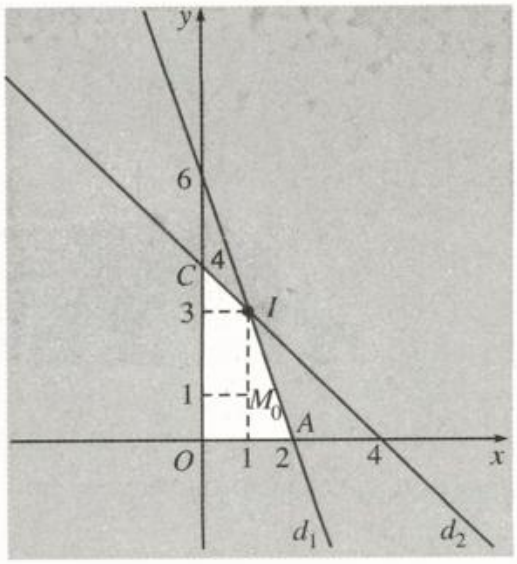
$(d_1) : 3x + y = 6$

$(d_2) : x + y = 4$

$(d_3) : x = 0$ (trục tung)

$(d_4) : y = 0$ (trục hoành).

Vì điểm $M_0(1 ; 1)$ có toạ độ thoả mãn tất cả các bất phương trình trong hệ trên nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) không chứa điểm M_0. Miền không bị tô đậm (hình tứ giác $OCIA$ kể cả bốn cạnh AI, IC, CO, OA) trong hình vẽ (h.30) là miền nghiệm của hệ đã cho.



Hình 30

2

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

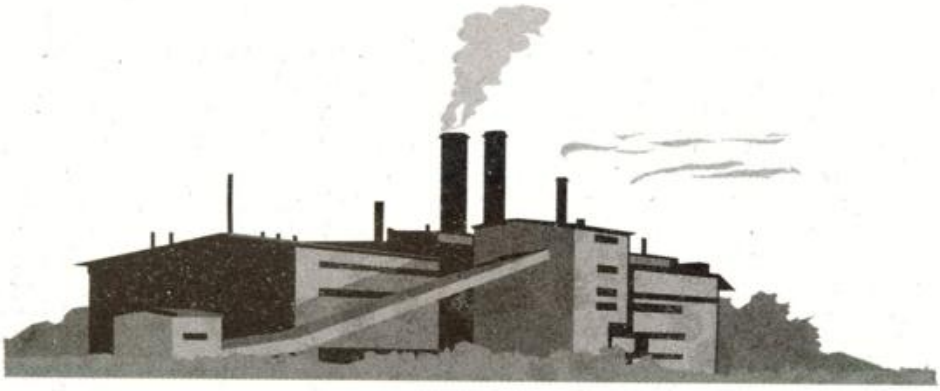
$$\begin{cases} 2x - y \le 3 \\ 2x + 5y \le 12x + 8. \end{cases}$$

IV – ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN KINH TẾ

Giải một số bài toán kinh tế thường dẫn đến việc xét những hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và giải chúng. Loại bài toán này được nghiên cứu trong một ngành toán học có tên gọi là *Quy hoạch tuyến tính*. Sau đây ta sẽ xét một bài toán đơn giản thuộc loại đó.

Bài toán. Một phân xưởng có hai máy đặc chủng M_1, M_2 sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu là I và II. Một tấn sản phẩm loại I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại II lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại I phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại II phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ trong một ngày, máy M_2 một ngày chỉ làm việc không quá 4 giờ. Hãy đặt kế hoạch sản xuất sao cho tổng số tiền lãi cao nhất.

Giải. Gọi x, y theo thứ tự là số tấn sản phẩm loại I, loại II sản xuất trong một ngày ($x \ge 0$, $y \ge 0$). Như vậy tiền lãi mỗi ngày là $L = 2x + 1,6y$ (triệu đồng) và số giờ làm việc (mỗi ngày) của máy M_1 là $3x + y$ và máy M_2 là $x + y$.



Vì mỗi ngày máy M_1 chỉ làm việc không quá 6 giờ, máy M_2 không quá 4 giờ nên x, y phải thoả mãn hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Bài toán trở thành

Trong các nghiệm của hệ bất phương trình (2), tìm nghiệm ($x = x_0$; $y = y_0$) sao cho $L = 2x + 1{,}6y$ lớn nhất.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (2) là tứ giác $OAIC$ kể cả miền trong (gọi là miền tứ giác $OAIC$) xem ví dụ ở mục III hình 30.

Người ta chứng minh được rằng biểu thức $L = 2x + 1{,}6y$ đạt được giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $OAIC$ (xem bài đọc thêm). Tính giá trị của biểu thức $L = 2x + 1{,}6y$ tại tất cả các đỉnh của tứ giác $OAIC$, ta thấy L lớn nhất khi $x = 1$, $y = 3$.

Vậy để có số tiền lãi cao nhất, mỗi ngày cần sản xuất 1 tấn sản phẩm loại I và 3 tấn sản phẩm loại II.

BÀI ĐỌC THÊM

PHƯƠNG PHÁP TÌM CỰC TRỊ CỦA BIỂU THỨC $F = ax + by$ TRÊN MỘT MIỀN ĐA GIÁC

Bài toán. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = ax + by$ (a, b là hai số đã cho không đồng thời bằng 0), trong đó x, y là các toạ độ của các điểm

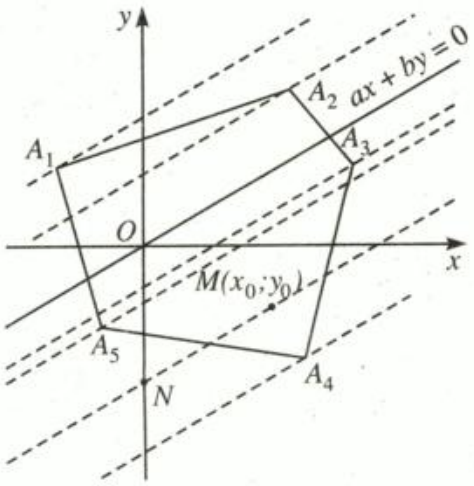
thuộc miền đa giác $A_1A_2... A_iA_{i+1}... A_n$. Xác định x, y để F đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải (h.31). Ta minh hoạ cách giải trong trường hợp $n = 5$ và chỉ xét trường hợp $b > 0$ (các trường hợp còn lại xét tương tự). Giả sử $M(x_0 ; y_0)$ là một điểm đã cho thuộc miền đa giác. Qua điểm M và mỗi đỉnh của đa giác, kẻ các đường thẳng song song với đường thẳng $ax + by = 0$.

Trong các đường thẳng đó, đường thẳng qua điểm M có phương trình

$$ax + by = ax_0 + by_0$$

và cắt trục tung tại điểm $N\left(0 ; \dfrac{ax_0 + by_0}{b}\right)$.



Hình 31

Vì $b > 0$ nên $ax_0 + by_0$ lớn nhất khi và chỉ khi $\dfrac{ax_0 + by_0}{b}$ lớn nhất.

Trên hình 31, $F = ax + by$ lớn nhất khi $(x ; y)$ là toạ độ của điểm A_1, bé nhất khi $(x ; y)$ là toạ độ điểm A_4.

Tóm lại, giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của biểu thức $F = ax + by$ đạt được tại một trong các đỉnh của miền đa giác.

Bài tập

1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau.

a) $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$; b) $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$.

2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của các hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau.

a) $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} - 1 < 0 \\ x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3y}{2} \le 2 \\ x \ge 0. \end{cases}$

3. Có ba nhóm máy A, B, C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc

các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm	
		Loại I	Loại II
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm I lãi 3 nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm II lãi 5 nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất.

Hướng dẫn : Áp dụng phương pháp giải trong mục IV.