§2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

I – KHÁI NIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

1. Bất phương trình một ẩn

1 Cho một ví dụ về bất phương trình một ẩn, chỉ rõ vế trái và vế phải của bất phương trình này.

> ***Bất phương trình ẩn x*** *là mệnh đề chứa biến có dạng*
>
> $$f(x) < g(x) \qquad (f(x) \le g(x)) \qquad (1)$$
>
> *trong đó* $f(x)$ và $g(x)$ *là những biểu thức của x.*
>
> *Ta gọi* $f(x)$ *và* $g(x)$ *lần lượt là vế trái và vế phải của bất phương trình* (1). *Số thực* x_0 *sao cho* $f(x_0) < g(x_0)$ $(f(x_0) \le g(x_0))$ *là mệnh đề đúng được gọi là một* ***nghiệm của bất phương trình*** (1).
>
> ***Giải bất phương trình*** *là tìm tập nghiệm của nó, khi tập nghiệm rỗng thì ta nói bất phương trình vô nghiệm.*

CHÚ Ý

Bất phương trình (1) cũng có thể viết lại dưới dạng sau

$$g(x) > f(x) \qquad (g(x) \ge f(x)).$$

2

Cho bất phương trình $2x \leq 3$.

a) Trong các số -2 ; $2\frac{1}{2}$; π ; $\sqrt{10}$ số nào là nghiệm, số nào không là nghiệm của bất phương trình trên ?

b) Giải bất phương trình đó và biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số.

2. Điều kiện của một bất phương trình

Tương tự đối với phương trình, ta gọi các điều kiện của ẩn số x để f(x) và g(x) có nghĩa là ***điều kiện xác định*** *(hay gọi tắt là* ***điều kiện) của bất phương trình*** (1).

Chẳng hạn điều kiện của bất phương trình

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1} \leq x^2$$

là $3 - x \geq 0$ và $x + 1 \geq 0$.

3. Bất phương trình chứa tham số

Trong một bất phương trình, ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là ***tham số***. Giải và biện luận bất phương trình chứa tham số là xét xem với các giá trị nào của tham số bất phương trình vô nghiệm, bất phương trình có nghiệm và tìm các nghiệm đó. Chẳng hạn

$$(2m-1)x + 3 < 0$$

$$x^2 - mx + 1 \geq 0$$

có thể được coi là những bất phương trình ẩn x tham số m.

II – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Hệ bất phương trình ẩn x *gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng.*

Mỗi giá trị của x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là một ***nghiệm*** *của hệ bất phương trình đã cho.*

Giải hệ bất phương trình *là tìm tập nghiệm của nó.*

Để giải một hệ bất phương trình ta giải từng bất phương trình rồi lấy giao của các tập nghiệm.

Ví dụ 1. Giải hệ bất phương trình

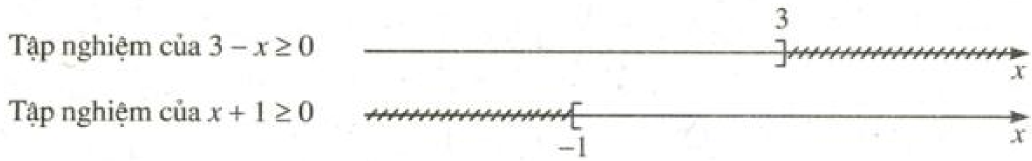
$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Giải. Giải từng bất phương trình ta có

$$3 - x \geq 0 \Leftrightarrow 3 \geq x$$

$$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Biểu diễn trên trục số các tập nghiệm của các bất phương trình này ta được



Giao của hai tập hợp trên là đoạn [−1 ; 3].

Vậy tập nghiệm của hệ là [−1 ; 3] hay còn có thể viết là $-1 \leq x \leq 3$.

III – MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Bất phương trình tương đương

3

Hai bất phương trình trong ví dụ 1 có tương đương hay không ? Vì sao ?

> Ta đã biết *hai bất phương trình có cùng tập nghiệm* (có thể rỗng) *là hai* ***bất phương trình tương đương*** và *dùng kí hiệu "⇔" để chỉ sự tương đương của hai bất phương trình đó.*
>
> *Tương tự, khi hai hệ bất phương trình có cùng một tập nghiệm ta cũng nói chúng tương đương với nhau và dùng kí hiệu "⇔" để chỉ sự tương đương đó.*

2. Phép biến đổi tương đương

> *Để giải một bất phương trình (hệ bất phương trình) ta liên tiếp biến đổi nó thành những bất phương trình (hệ bất phương trình) tương đương cho đến khi được bất phương trình (hệ bất phương trình) đơn giản nhất mà ta có thể viết ngay tập nghiệm. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các* ***phép biến đổi tương đương.***

Chẳng hạn khi giải hệ bất phương trình trong ví dụ 1 ta có thể viết

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq x \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3.$$

Dưới đây ta sẽ lần lượt xét một số phép biến đổi thường sử dụng khi giải bất phương trình.

3. Cộng (trừ)

Cộng (trừ) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$\boxed{P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x)}$$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$(x + 2)(2x - 1) - 2 \leq x^2 + (x - 1)(x + 3).$$

Phân tích bài toán

Khai triển và rút gọn từng vế ta được bất phương trình

$$2x^2 + 3x - 4 \leq 2x^2 + 2x - 3.$$

Chuyển vế và đổi dấu các hạng tử của vế phải bất phương trình này (thực chất là cộng hai vế của bất phương trình với biểu thức $-(2x^2 + 2x - 3)$ ta được một bất phương trình đã biết cách giải.

Giải

$$\begin{aligned}
&(x + 2)(2x - 1) - 2 \leq x^2 + (x - 1)(x + 3) \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2 + 4x - x - 2 - 2 \leq x^2 + x^2 - x + 3x - 3 \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2 + 3x - 4 \leq 2x^2 + 2x - 3 \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2 + 3x - 4 - (2x^2 + 2x - 3) \leq 0 \\
\Leftrightarrow\ & x - 1 \leq 0 \\
\Leftrightarrow\ & x \leq 1.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty ; 1]$.

Nhận xét. Nếu cộng hai vế của bất phương trình $P(x) < Q(x) + f(x)$ với biểu thức $-f(x)$ ta được bất phương trình $P(x) - f(x) < Q(x)$. Do đó

$$\boxed{P(x) < Q(x) + f(x) \Leftrightarrow P(x) - f(x) < Q(x).}$$

Như vậy chuyển vế và đổi dấu một hạng tử trong một bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

4. Nhân (chia)

Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị dương (mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình) ta được một bất phương trình tương đương. Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị âm (mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình) và đổi chiều bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) < Q(x).f(x) \text{ nếu } f(x) > 0,\ \forall x$$
$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) > Q(x).f(x) \text{ nếu } f(x) < 0,\ \forall x$$

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2} > \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}.$$

Phân tích bài toán. Mẫu thức của hai vế bất phương trình là những biểu thức luôn dương. Nhân hai vế của bất phương trình với hai biểu thức luôn dương đó, ta được một bất phương trình tương đương.

Giải

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2} > \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$$
$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 + 1) > (x^2 + x)(x^2 + 2)$$
$$\Leftrightarrow x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 > x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x$$
$$\Leftrightarrow x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 - x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x > 0$$
$$\Leftrightarrow -x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 1$.

5. Bình phương

Bình phương hai vế của một bất phương trình có hai vế không âm mà không làm thay đổi điều kiện của nó ta được một bất phương trình tương đương.

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x) \text{ nếu } P(x) \geq 0,\ Q(x) \geq 0,\ \forall x$$

Ví dụ 4. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2+2x+2} > \sqrt{x^2-2x+3}.$$

Giải. Hai vế bất phương trình đều có nghĩa và dương với mọi x. Bình phương hai vế bất phương trình này ta được

$$\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)^2 > \left(\sqrt{x^2-2x+3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+2 > x^2-2x+3$$

$$\Leftrightarrow 4x > 1$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{4}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \dfrac{1}{4}$.

6. Chú ý

Trong quá trình biến đổi một bất phương trình thành bất phương trình tương đương cần chú ý những điều sau

1) Khi biến đổi các biểu thức ở hai vế của một bất phương trình thì điều kiện của bất phương trình có thể bị thay đổi. Vì vậy, để tìm nghiệm của một bất phương trình ta phải tìm các giá trị của x thoả mãn điều kiện của bất phương trình đó và là nghiệm của bất phương trình mới.

Ví dụ 5. Giải bất phương trình

$$\frac{5x+2\sqrt{3-x}}{4} - 1 > \frac{x}{4} - \frac{4-3\sqrt{3-x}}{6}.$$

Giải. Điều kiện $3 - x \geq 0$.

Ta có

$$\frac{5x+2\sqrt{3-x}}{4} - 1 > \frac{x}{4} - \frac{4-3\sqrt{3-x}}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{4} + \frac{\sqrt{3-x}}{2} - 1 > \frac{x}{4} - \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3-x}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{4} + \frac{\sqrt{3-x}}{2} - 1 - \frac{x}{4} + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3-x}}{2} > 0$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{3} > 0.$$

Kết hợp với điều kiện của bất phương trình, ta có nghiệm của bất phương trình là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{3} > 0 \\ 3 - x \geq 0. \end{cases}$$

Hệ bất phương trình này có nghiệm là $\dfrac{1}{3} < x \leq 3$.

Kết luận. Nghiệm của bất phương trình đã cho là $\dfrac{1}{3} < x \leq 3$.

> *2) Khi nhân (chia) hai vế của bất phương trình $P(x) < Q(x)$ với biểu thức $f(x)$ ta cần lưu ý đến điều kiện về dấu của $f(x)$. Nếu $f(x)$ nhận cả giá trị dương lẫn giá trị âm thì ta phải lần lượt xét từng trường hợp. Mỗi trường hợp dẫn đến một hệ bất phương trình.*

Ta minh hoạ điều này qua ví dụ sau.

Ví dụ 6. Giải bất phương trình $\dfrac{1}{x-1} \geq 1$.

Giải. Điều kiện $x \neq 1$.

a) Khi $x - 1 < 0$ (tức là $x < 1$) ta có $\dfrac{1}{x-1} < 0$. Do đó trong trường hợp này mọi $x < 1$ đều không là nghiệm của bất phương trình hay bất phương trình vô nghiệm.

b) Khi $x - 1 > 0$ (tức là $x > 1$), nhân hai vế của bất phương trình đã cho với $x - 1$ ta được bất phương trình tương đương $1 \geq x - 1$. Như vậy trong trường hợp này nghiệm của bất phương trình đã cho là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 1 \geq x - 1 \\ x > 1. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được nghiệm là $1 < x \leq 2$.

Kết luận. Nghiệm của bất phương trình đã cho là $1 < x \leq 2$.

> *3) Khi giải bất phương trình $P(x) < Q(x)$ mà phải bình phương hai vế thì ta lần lượt xét hai trường hợp :*
>
> *a) $P(x)$, $Q(x)$ cùng có giá trị không âm, ta bình phương hai vế bất phương trình.*
>
> *b) $P(x)$, $Q(x)$ cùng có giá trị âm ta viết*
>
> $$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow -Q(x) < -P(x)$$
>
> *rồi bình phương hai vế bất phương trình mới.*

Ví dụ 7. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2 + \frac{17}{4}} > x + \frac{1}{2}.$$

Giải. Hai vế của bất phương trình có nghĩa với mọi x.

a) Khi $x + \frac{1}{2} < 0$ (tức là $x < -\frac{1}{2}$), vế phải của bất phương trình âm, vế trái dương nên trong trường hợp này mọi $x < -\frac{1}{2}$ đều là nghiệm của bất phương trình.

b) Khi $x + \frac{1}{2} \geq 0$ (tức là $x \geq -\frac{1}{2}$), hai vế của bất phương trình đã cho đều không âm nên bình phương hai vế của nó ta được bất phương trình tương đương $x^2 + \frac{17}{4} > x^2 + x + \frac{1}{4}$. Như vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho trong trường hợp này là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x^2 + \dfrac{17}{4} > x^2 + x + \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được nghiệm là $-\frac{1}{2} \leq x < 4$.

Tổng hợp lại, nghiệm của bất phương trình đã cho bao gồm

$$x < -\frac{1}{2} \text{ và } -\frac{1}{2} \leq x < 4.$$

Kết luận. Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < 4$.

Bài tập

1. Tìm các giá trị x thoả mãn điều kiện của mỗi bất phương trình sau

a) $\dfrac{1}{x} < 1 - \dfrac{1}{x+1}$;

b) $\dfrac{1}{x^2 - 4} \leq \dfrac{2x}{x^2 - 4x + 3}$;

c) $2|x| - 1 + \sqrt[3]{x-1} < \dfrac{2x}{x+1}$;

d) $2\sqrt{1-x} > 3x + \dfrac{1}{x+4}$.

2. Chứng minh các bất phương trình sau vô nghiệm

a) $x^2 + \sqrt{x+8} \leq -3$;

b) $\sqrt{1 + 2(x-3)^2} + \sqrt{5 - 4x + x^2} < \dfrac{3}{2}$;

c) $\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{7 + x^2} > 1$.

3. Giải thích vì sao các cặp bất phương trình sau tương đương ?

a) $-4x + 1 > 0$ và $4x - 1 < 0$;

b) $2x^2 + 5 \leq 2x - 1$ và $2x^2 - 2x + 6 \leq 0$;

c) $x + 1 > 0$ và $x + 1 + \dfrac{1}{x^2+1} > \dfrac{1}{x^2+1}$;

d) $\sqrt{x-1} \geq x$ và $(2x+1)\sqrt{x-1} \geq x(2x+1)$.

4. Giải các bất phương trình sau

a) $\dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{x-2}{3} < \dfrac{1-2x}{4}$;

b) $(2x-1)(x+3) - 3x + 1 \leq (x-1)(x+3) + x^2 - 5$.

5. Giải các hệ bất phương trình

a) $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} < 4x + 7 \\ \dfrac{8x+3}{2} < 2x + 5 \text{ ;} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \dfrac{1}{3} \\ 2(x-4) < \dfrac{3x-14}{2}. \end{cases}$