§3 CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I – CÔNG THỨC CỘNG

Công thức cộng là những công thức biểu thị $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$, $\cot(a \pm b)$ qua các giá trị lượng giác của các góc a và b. Ta có

$$\boxed{\begin{aligned}
&\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b\\
&\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b\\
&\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b\\
&\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b\\
&\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}\\
&\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}.
\end{aligned}}$$

Với điều kiện là các biểu thức đều có nghĩa.

Ta thừa nhận công thức đầu. Từ công thức đó có thể chứng minh dễ dàng các công thức còn lại. Chẳng hạn

$$\cos(a+b) = \cos[a-(-b)] = \cos a\cos(-b) + \sin a\sin(-b)$$

$$= \cos a\cos b - \sin a\sin b.$$

$$\sin(a-b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a-b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b$$

$$= \sin a\cos b - \cos a\sin b.$$

1

Hãy chứng minh công thức $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$.

Ví dụ 1. Tính $\tan\frac{13\pi}{12}$.

Giải. Ta có

$$\tan\frac{13\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right) = \tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}.$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}.$$

Giải. Ta có

$$\frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \frac{\sin a\cos b + \cos a\sin b}{\sin a\cos b - \cos a\sin b}.$$

Chia cả tử và mẫu của vế phải cho $\cos a\cos b$, ta được điều phải chứng minh.

II – CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

Cho $a = b$ trong các công thức cộng ta được các *công thức nhân đôi* sau.

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin 2a = 2\sin a\cos a\\&\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a\\&\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}.\end{aligned}}$$

Từ các công thức nhân đôi suy ra các công thức

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}.$$

Các công thức này gọi là các *công thức hạ bậc*.

Ví dụ 1. Biết $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$, tính $\sin 2a$.

Giải. Ta có $1 = \sin^2 a + \cos^2 a = (\sin a + \cos a)^2 - 2\sin a\cos a$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \sin 2a.$$

Suy ra $\sin 2a = -\frac{3}{4}$.

Ví dụ 2. Tính $\cos\frac{\pi}{8}$.

Giải. Ta có $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1.$

Suy ra $2\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Vì $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ nên suy ra $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

III – CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG, TỔNG THÀNH TÍCH

1. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

Các công thức trên được gọi là các *công thức biến đổi tích thành tổng*.

2 Từ các công thức cộng, hãy suy ra các công thức trên.

Ví dụ 1. Tính giá trị của các biểu thức

$$A = \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8};\ B = \sin\frac{13\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}.$$

Giải. Ta có

$$A = \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$B = \sin\frac{13\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{24} - \frac{5\pi}{24}\right) - \cos\left(\frac{13\pi}{24} + \frac{5\pi}{24}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{4}.$$

2. Công thức biến đổi tổng thành tích

3 Bằng cách đặt $u = a - b$, $v = a + b$, hãy biến đổi $\cos u + \cos v$, $\sin u + \sin v$ thành tích.

Ta gọi các công thức sau đây là các *công thức biến đổi tổng thành tích*

$$\boxed{\begin{aligned}
&\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\\
&\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}\\
&\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\\
&\sin u - \sin v = 2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}.
\end{aligned}}$$

Ví dụ 2. Tính

$$A = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}.$$

Giải. Ta có

$$A = \left(\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}\right) + \cos\frac{5\pi}{9}$$

$$= 2\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3} - \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{9}\right)$$

$$= \cos\frac{4\pi}{9} - \cos\frac{4\pi}{9} = 0.$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Giải. Trong tam giác ABC ta có $A + B + C = \pi$.

Từ đó suy ra $\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}$.

Vì vậy, $\sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$, $\sin\dfrac{C}{2} = \cos\dfrac{A+B}{2}$.

Bây giờ ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Bài tập

1. Tính

a) $\cos 225^\circ$, $\sin 240^\circ$, $\cot(-15^\circ)$, $\tan 75^\circ$;

b) $\sin\dfrac{7\pi}{12}$, $\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\tan\dfrac{13\pi}{12}$.

2. Tính

a) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, biết $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

b) $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

c) $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$, biết

$$\sin a = \frac{4}{5},\ 0^{o} < a < 90^{o} \text{ và } \sin b = \frac{2}{3},\ 90^{o} < b < 180^{o}.$$

3. Rút gọn các biểu thức

a) $\sin(a + b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(-b)$.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \frac{1}{2}\sin^2 a$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) - \sin(a - b)$.

4. Chứng minh các đẳng thức

a) $\dfrac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \dfrac{\cot a\cot b + 1}{\cot a\cot b - 1}$.

b) $\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$.

c) $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$.

5. Tính $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$, biết

a) $\sin a = -0{,}6$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$.

b) $\cos a = -\frac{5}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$.

c) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ và $\frac{3\pi}{4} < a < \pi$.

6. Cho $\sin 2a = -\frac{5}{9}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$.

Tính $\sin a$ và $\cos a$.

7. Biến đổi thành tích các biểu thức sau

a) $1 - \sin x$;

b) $1 + \sin x$;

c) $1 + 2\cos x$;

d) $1 - 2\sin x$.

8. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$.