



## CUNG VÀ GÓC LUỢNG GIÁC

### I – KHÁI NIỆM CUNG VÀ GÓC LUỢNG GIÁC

#### 1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác

Cắt một hình tròn bằng bìa cứng, đánh dấu tâm  $O$  và đường kính  $AA'$ . Đính một sợi dây vào hình tròn tại  $A$ . Xem dây như một trực số  $t't$ , gốc tại  $A$ , đơn vị trên trực bằng bán kính  $OA$ . Như vậy hình tròn này có bán kính  $R = 1$ .

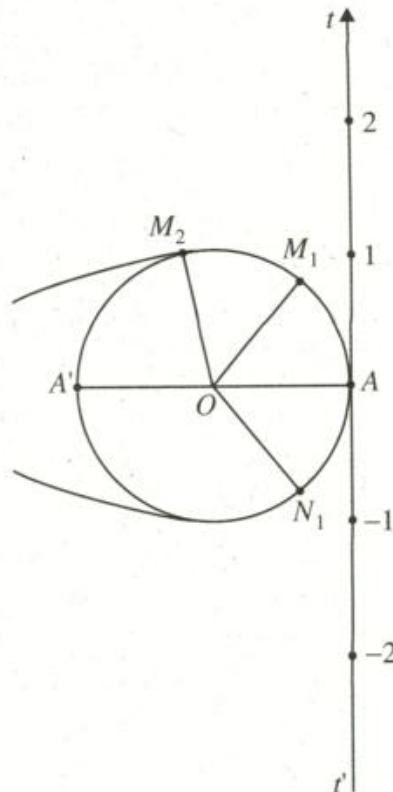
Cuốn dây áp sát đường tròn, điểm 1 trên trực  $t't$  chuyển thành điểm  $M_1$  trên đường tròn, điểm 2 chuyển thành điểm  $M_2$ , ... ; điểm  $-1$  thành điểm  $N_1$ , ... (h.39).

Như vậy mỗi điểm trên trực số được đặt tương ứng với một điểm xác định trên đường tròn.

##### Nhận xét

a) Với cách đặt tương ứng này hai điểm khác nhau trên trực số có thể ứng với cùng một điểm trên đường tròn. Chẳng hạn điểm 1 trên trực số ứng với điểm  $M_1$ , nhưng khi cuộn quanh đường tròn một vòng nữa thì có một điểm khác trên trực số cũng ứng với điểm  $M_1$ .

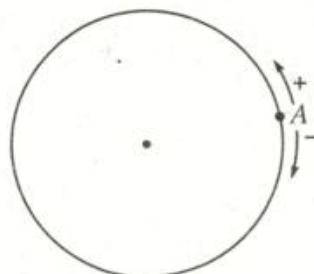
b) Nếu ta cuốn tia  $At$  theo đường tròn như trên hình 39 thì mỗi số thực dương  $t$  ứng với một điểm  $M$  trên đường tròn. Khi  $t$  tăng dần thì điểm  $M$  chuyển động trên đường tròn theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ. Tương tự, nếu cuốn tia  $A't'$  theo đường tròn thì mỗi số thực âm  $t$  ứng với một điểm  $M$  trên đường tròn và khi  $t$  giảm dần thì điểm  $M$  chuyển động trên đường tròn theo chiều quay của kim đồng hồ.



Hình 39

Ta đi tới khái niệm đường tròn định hướng sau đây :

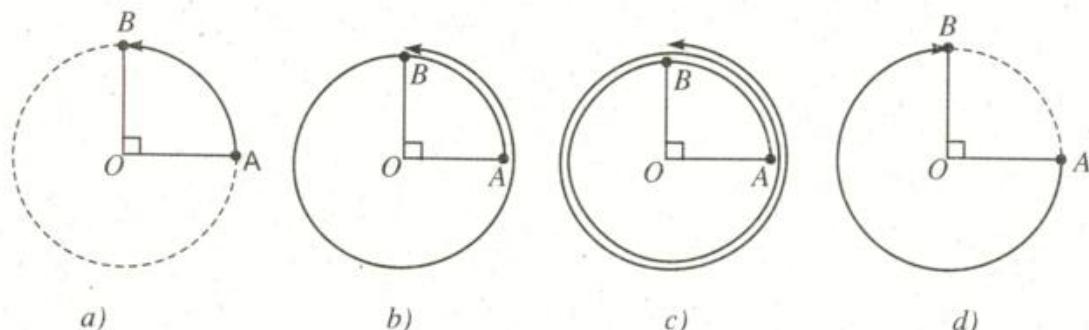
**Đường tròn định hướng** là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm. Ta quy ước chọn chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương (h.40).



Hình 40

Trên đường tròn định hướng cho hai điểm  $A$  và  $B$ . Một điểm  $M$  di động trên đường tròn luôn theo một chiều (âm hoặc dương) từ  $A$  đến  $B$  tạo nên một **cung lượng giác** có điểm đầu  $A$  điểm cuối  $B$ .

Hình 41 cho ta hình ảnh của bốn cung lượng giác khác nhau có cùng điểm đầu  $A$ , điểm cuối  $B$ .



Hình 41

Ta có thể hình dung một điểm  $M$  di động trên đường tròn từ  $A$  đến  $B$  theo chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ, nó lân lượt tạo nên các cung tô đậm trên hình 41. Nếu dừng lại ngay khi gặp  $B$  lần đầu, nó tạo nên cung tô đậm trên hình 41a), nếu nó dừng lại sau khi quay một vòng rồi đi tiếp gặp  $B$  lần thứ hai nó tạo nên cung tô đậm trên hình 41b),...

Khi  $M$  di động theo chiều ngược lại, nó tạo nên cung tô đậm trên hình 41d) nếu nó dừng lại khi gặp  $B$  lần đầu,...

Mỗi lần điểm  $M$  di động trên đường tròn định hướng luôn theo một chiều (âm hoặc dương) từ điểm  $A$  và dừng lại ở điểm  $B$ , ta được một cung lượng giác điểm đầu  $A$  điểm cuối  $B$ . Như vậy

Với hai điểm  $A, B$  đã cho trên đường tròn định hướng ta có vô số cung lượng giác điểm đầu  $A$ , điểm cuối  $B$ . Mỗi cung như vậy đều được kí hiệu là  $\widehat{AB}$ .

### CHÚ Ý

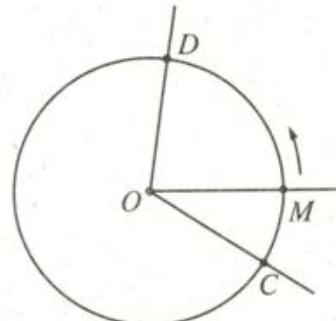
Trên một đường tròn định hướng, lấy hai điểm  $A$  và  $B$  thì Kí hiệu  $\widehat{AB}$  chỉ một cung hình học (cung lớn hoặc cung bé) hoàn toàn xác định.

Kí hiệu  $\widehat{AB}$  chỉ một cung lượng giác điểm đầu  $A$ , điểm cuối  $B$ .

## 2. Góc lượng giác

Trên đường tròn định hướng cho một cung lượng giác  $\widehat{CD}$  (h.42). Một điểm  $M$  chuyển động trên đường tròn từ  $C$  tới  $D$

tạo nên cung lượng giác  $\widehat{CD}$  nói trên. Khi đó tia  $OM$  quay xung quanh gốc  $O$  từ vị trí  $OC$  tới vị trí  $OD$ . Ta nói tia  $OM$  tạo ra một **góc lượng giác**, có tia đầu là  $OC$ , tia cuối là  $OD$ . Kí hiệu góc lượng giác đó là  $(OC, OD)$ .



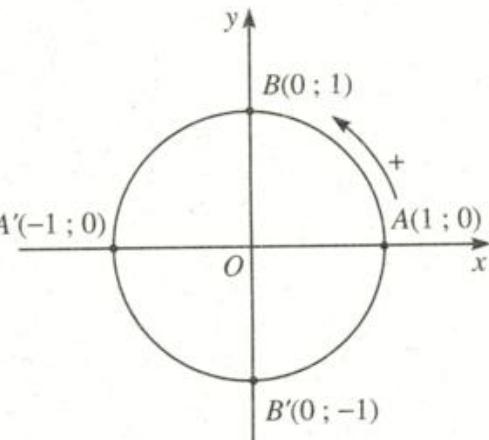
Hình 42

## 3. Đường tròn lượng giác

Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$  vẽ đường tròn định hướng tâm  $O$  bán kính  $R = 1$  (h.43).

Đường tròn này cắt hai trục toạ độ tại bốn điểm  $A(1; 0)$ ,  $A'(-1; 0)$ ,  $B(0; 1)$ ,  $B'(0; -1)$ . Ta lấy  $A(1; 0)$  làm điểm gốc của đường tròn đó.

Đường tròn xác định như trên được gọi là **đường tròn lượng giác (góc A)**.



Hình 43

## II – SỐ ĐO CỦA CUNG VÀ GÓC LUỢNG GIÁC

### 1. Độ và radian

#### a) Đơn vị radian

Đơn vị độ đã được sử dụng để đo góc từ rất lâu đời. Trong Toán học và Vật lí người ta còn dùng một đơn vị nữa để đo góc và cung, đó là radian (đọc là ra-đi-an).

Trên hình 39 ta thấy độ dài cung nhỏ  $\widehat{AM_1}$  bằng 1 đơn vị, tức là bằng độ dài bán kính. Ta nói số đo của cung  $\widehat{AM_1}$  (hay số đo của góc ở tâm  $\widehat{AOM_1}$ ) bằng 1 radian (viết tắt là 1 rad). Tổng quát

*Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1 rad.*

### b) Quan hệ giữa độ và radian

Ta biết độ dài cung nửa đường tròn là  $\pi R$ , nên trong hình 43 số đo của cung  $\widehat{AA'}$  (hay góc bẹt  $\widehat{AOA'}$ ) là  $\pi$  rad (vì  $R = 1$ ). Vì góc bẹt có số đo độ là 180 nên ta viết  $180^\circ = \pi$  rad.

Suy ra

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad và } 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

Với  $\pi \approx 3,14$  thì  $1^\circ \approx 0,01745$  rad và  $1$  rad  $\approx 57^\circ 17'45''$ .

#### CHÚ Ý

Khi viết số đo của một góc (hay cung) theo đơn vị radian, người ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn cung  $\frac{\pi}{2}$  được hiểu là cung  $\frac{\pi}{2}$  rad.

#### Bảng chuyển đổi thông dụng

Độ	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$



1

Sử dụng máy tính bỏ túi để đổi từ độ sang radian và ngược lại.

Nếu dùng máy tính CASIO fx-500MS ta làm như sau

a) Đổi  $35^\circ 47'25''$  sang radian

Ấn ba lần phím **MODE** rồi ấn **2** để màn hình hiện chữ **R**. Sau đó ấn liên tiếp

**3** **5** **...** **4** **7** **...** **2** **5** **...** **SHIFT**

**DRG ▶** **1** **=**

cho kết quả 0,6247 (đã làm tròn đến bốn chữ số thập phân).

b) Đổi 3 rad ra độ

Ấn ba lần phím **MODE** rồi ấn **1** để màn hình hiện chữ **D**. Sau đó ấn liên tiếp **3 SHIFT DRG ▶ 2 = SHIFT ...**

cho kết quả  $171^{\circ}53'14''$  (đã làm tròn đến giây).

### c) Độ dài của một cung tròn

Trên đường tròn bán kính  $R$ , cung nửa đường tròn có số đo là  $\pi$  rad và có độ dài là  $\pi R$ . Vậy

Cung có số đo  $\alpha$  rad của đường tròn bán kính  $R$  có độ dài

$$l = R\alpha.$$

## 2. Số đo của một cung lượng giác

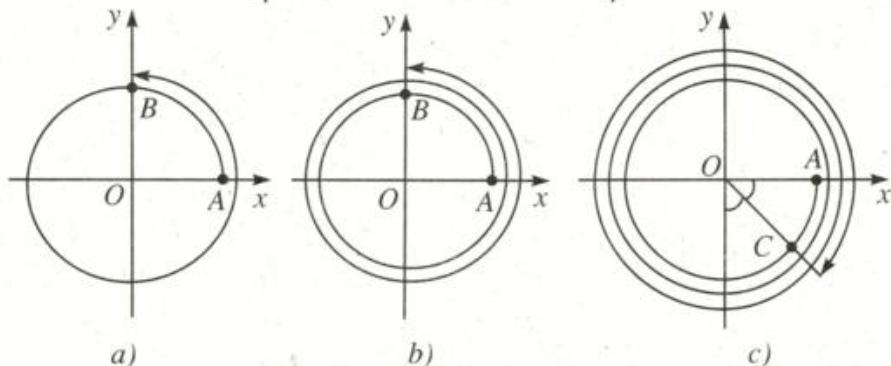
**Ví dụ.** Xét cung lượng giác  $\widehat{AB}$  trong hình 44a). Một điểm  $M$  di động trên đường tròn theo chiều dương. Khi  $M$  di động từ  $A$  đến  $B$  tạo nên cung  $\frac{1}{4}$  đường tròn, ta nói cung này có số đo  $\frac{\pi}{2}$ , sau đó đi tiếp một vòng tròn nữa (thêm  $2\pi$ ), ta được cung lượng giác  $\widehat{AB}$  có số đo là  $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$ .

Tương tự, cung lượng giác  $\widehat{AB}$  trong hình 44b) có số đo là

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi + 2\pi = \frac{9\pi}{2}.$$

Cung lượng giác  $\widehat{AC}$  trong hình 44c) lại có số đo là

$$-\frac{\pi}{4} - 2\pi - 2\pi - 2\pi = -\frac{25\pi}{4}.$$



Hình 44

Từ các ví dụ nêu trong hình 44 ta thấy

Số đo của một cung lượng giác  $\widehat{AM}$  ( $A \neq M$ ) là một số thực, âm hay dương.

Kí hiệu số đo của cung  $\widehat{AM}$  là  $sđ \widehat{AM}$ .

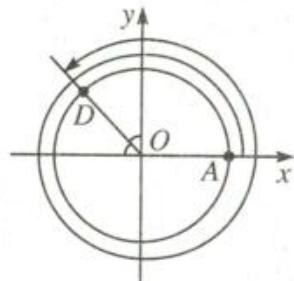


Cung lượng giác  $\widehat{AD}$  (h.45) có số đo là bao nhiêu ?

GHI NHỚ

Số đo của các cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai nhau một bội của  $2\pi$ . Ta viết

$$sđ \widehat{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$



Hình 45

trong đó  $\alpha$  là số đo của một cung lượng giác tuỳ ý có điểm đầu là  $A$  và điểm cuối là  $M$ .

Khi điểm cuối  $M$  trùng với điểm đầu  $A$  ta có

$$sđ \widehat{AA} = k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

khi  $k = 0$  thì  $sđ \widehat{AA} = 0$ .

Người ta cũng viết số đo bằng độ. Công thức tổng quát của số đo bằng độ của các cung lượng giác  $\widehat{AM}$  là

$$sđ \widehat{AM} = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

trong đó  $a^\circ$  là số đo của một cung lượng giác tuỳ ý có điểm đầu là  $A$  và điểm cuối là  $M$ .

### 3. Số đo của một góc lượng giác

Ta định nghĩa

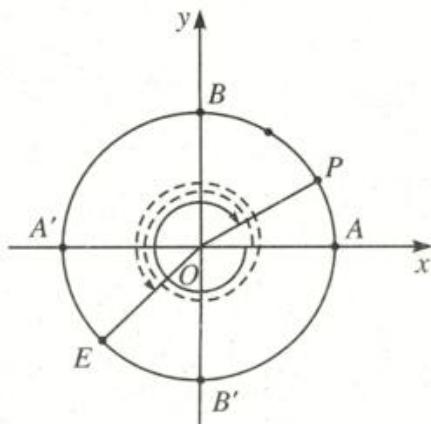
|| Số đo của góc lượng giác ( $OA, OC$ ) là số đo của cung lượng giác  $\widehat{AC}$  tương ứng.



3

Tìm số đo của các góc lượng giác  $(OA, OE)$  và  $(OA, OP)$  trên hình 46 (điểm  $E$  là điểm chính giữa của cung  $\widehat{A'B'}$ ,  $\widehat{AP} = \frac{1}{3} \widehat{AB}$ ).

Viết số đo này theo đơn vị radian và theo đơn vị độ.



Hình 46

## CHÚ Ý

Vì mỗi cung lượng giác ứng với một góc lượng giác và ngược lại, đồng thời số đo của các cung và góc lượng giác tương ứng là trùng nhau, nên từ nay về sau khi ta nói về cung thì điều đó cũng đúng cho góc và ngược lại.

## 4. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Chọn điểm gốc  $A(1; 0)$  làm điểm đầu của tất cả các cung lượng giác trên đường tròn lượng giác. Để biểu diễn cung lượng giác có số đo  $\alpha$  trên đường tròn lượng giác ta cần chọn điểm cuối  $M$  của cung này. Điểm cuối  $M$  được xác định bởi hệ thức số  $\widehat{AM} = \alpha$ .

**Ví dụ.** Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các cung lượng giác có số đo lần lượt là

$$\text{a) } \frac{25\pi}{4}; \quad \text{b) } -765^\circ.$$

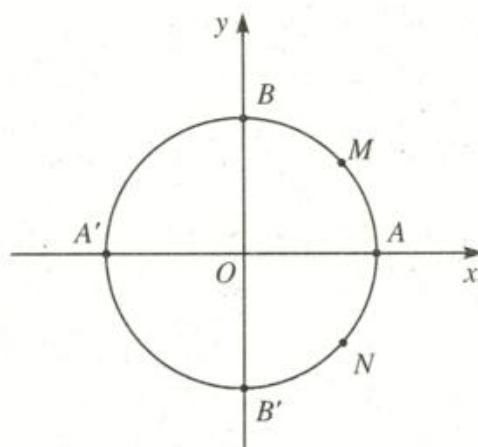
*Giải*

$$\text{a) } \frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 3 \cdot 2\pi.$$

Vậy điểm cuối của cung  $\frac{25\pi}{4}$  là điểm chính giữa  $M$  của cung nhỏ  $\widehat{AB}$  (h.47).

$$\text{b) } -765^\circ = -45^\circ + (-2) \cdot 360^\circ.$$

Vậy điểm cuối của cung  $-765^\circ$  là điểm chính giữa  $N$  của cung nhỏ  $\widehat{AB'}$  (h.47).



Hình 47

## Bài tập

1. Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo khác nhau trên đường tròn lượng giác, có thể xảy ra trường hợp các điểm cuối của chúng trùng nhau không? Khi nào trường hợp này xảy ra?
2. Đổi số đo của các góc sau đây ra radian
  - a)  $18^\circ$ ;
  - b)  $57^\circ 30'$ ;
  - c)  $-25^\circ$ ;
  - d)  $-125^\circ 45'$ .
3. Đổi số đo của các cung sau đây ra độ, phút, giây
  - a)  $\frac{\pi}{18}$ ;
  - b)  $\frac{3\pi}{16}$ ;
  - c)  $-2$ ;
  - d)  $\frac{3}{4}$ .
4. Một đường tròn có bán kính 20cm. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo
  - a)  $\frac{\pi}{15}$ ;
  - b) 1,5;
  - c)  $37^\circ$ .
5. Trên đường tròn lượng giác hãy biểu diễn các cung có số đo
  - a)  $-\frac{5\pi}{4}$ ;
  - b)  $135^\circ$ ;
  - c)  $\frac{10\pi}{3}$ ;
  - d)  $-225^\circ$ .
6. Trên đường tròn lượng giác gốc  $A$ , xác định các điểm  $M$  khác nhau, biết rằng cung  $\widehat{AM}$  có số đo tương ứng là (trong đó  $k$  là một số nguyên tùy ý)
  - a)  $k\pi$ ;
  - b)  $k\frac{\pi}{2}$ ;
  - c)  $k\frac{\pi}{3}$ .
7. Trên đường tròn lượng giác cho điểm  $M$  xác định bởi số  $\widehat{AM} = \alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ). Gọi  $M_1, M_2, M_3$  lần lượt là điểm đối xứng của  $M$  qua trục  $Ox$ , trục  $Oy$  và gốc toạ độ. Tìm số đo của các cung  $\widehat{AM}_1, \widehat{AM}_2, \widehat{AM}_3$ .