



ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

I – KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH



1

Nêu ví dụ về phương trình một ẩn, phương trình hai ẩn.

1. Phương trình một ẩn

Phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là những biểu thức của x . Ta gọi $f(x)$ là vế trái, $g(x)$ là vế phải của phương trình (1).

*Nếu có số thực x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ là mệnh đề đúng thì x_0 được gọi là một **nghiệm của phương trình** (1).*

***Giải phương trình** (1) là tìm tất cả các nghiệm của nó (nghĩa là tìm tập nghiệm).*

*Nếu phương trình không có nghiệm nào cả thì ta nói phương trình **vô nghiệm** (hoặc nói tập nghiệm của nó là rỗng).*

CHÚ Ý

Có trường hợp, khi giải phương trình ta không viết được chính xác nghiệm của chúng dưới dạng số thập phân mà chỉ viết gần

đúng. Chẳng hạn, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ là nghiệm của phương trình

$2x = \sqrt{3}$. Giá trị $0,866 \left(\approx \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ là một **nghiệm gần đúng** của

phương trình.

2. Điều kiện của một phương trình



Cho phương trình $\frac{x+1}{x-2} = \sqrt{x-1}$.

Khi $x=2$ vế trái của phương trình đã cho có nghĩa không? Vế phải có nghĩa khi nào?

Khi giải phương trình (1), ta cần lưu ý tới điều kiện đối với ẩn số x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa (tức là mọi phép toán đều thực hiện được). Ta cũng nói đó là *điều kiện xác định của phương trình* (hay gọi tắt là *điều kiện của phương trình*).

Khi các phép toán ở hai vế của một phương trình đều thực hiện được với mọi giá trị của x thì ta có thể không ghi điều kiện của phương trình.



Hãy tìm điều kiện của các phương trình

a) $3-x^2 = \frac{x}{\sqrt{2-x}}$;

b) $\frac{1}{x^2-1} = \sqrt{x+3}$.

3. Phương trình nhiều ẩn

Ngoài các phương trình một ẩn, ta còn gặp những phương trình có nhiều ẩn số, chẳng hạn

$$3x + 2y = x^2 - 2xy + 8, \quad (2)$$

$$4x^2 - xy + 2z = 3z^2 + 2xz + y^2. \quad (3)$$

Phương trình (2) là phương trình hai ẩn (x và y), còn (3) là phương trình ba ẩn (x , y và z).

Khi $x=2$, $y=1$ thì hai vế của phương trình (2) có giá trị bằng nhau, ta nói cặp số $(x; y) = (2; 1)$ là một nghiệm của phương trình (2).

Tương tự, bộ ba số $(x; y; z) = (-1; 1; 2)$ là một nghiệm của phương trình (3).

4. Phương trình chứa tham số

Trong một phương trình (một hoặc nhiều ẩn), ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là *tham số*.

Giải và biện luận phương trình chứa tham số nghĩa là xét xem với giá trị nào của tham số phương trình vô nghiệm, có nghiệm và tìm các nghiệm đó.

Chẳng hạn $(m + 1)x - 3 = 0,$
 $x^2 - 2x + m = 0$

có thể được coi là các phương trình ẩn x chứa tham số m .

II – PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ



4

Các phương trình sau có tập nghiệm bằng nhau hay không

a) $x^2 + x = 0$ và $\frac{4x}{x-3} + x = 0$? b) $x^2 - 4 = 0$ và $2 + x = 0$?

1. Phương trình tương đương

|| Hai phương trình được gọi là **tương đương** khi chúng có cùng tập nghiệm.

Ví dụ 1. Hai phương trình $2x - 5 = 0$ và $3x - \frac{15}{2} = 0$ tương đương với nhau vì cùng có nghiệm duy nhất là $x = \frac{5}{2}$.

2. Phép biến đổi tương đương

Để giải một phương trình, thông thường ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các **phép biến đổi tương đương**.

Định lí sau đây nêu lên một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng.

ĐỊNH LÍ

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương

- a) Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc cùng một biểu thức ;*
- b) Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.*

CHÚ Ý

Chuyển vế và đổi dấu một biểu thức thực chất là thực hiện phép cộng hay trừ hai vế với biểu thức đó.

Kí hiệu. Ta dùng kí hiệu " \Leftrightarrow " để chỉ sự tương đương của các phương trình.



5

Tìm sai lầm trong phép biến đổi sau

$$x + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1 - \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x = 1.$$

3. Phương trình hệ quả

Nếu mọi nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ đều là nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ được gọi là **phương trình hệ quả** của phương trình $f(x) = g(x)$.

Ta viết

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x).$$

Phương trình hệ quả có thể có thêm nghiệm không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Ta gọi đó là **nghiệm ngoại lai**.

Khi giải phương trình, không phải lúc nào cũng áp dụng được phép biến đổi tương đương. Trong nhiều trường hợp ta phải thực hiện các phép biến đổi đưa tới phương trình hệ quả, chẳng hạn bình phương hai vế, nhân hai vế của phương trình với một đa thức. Lúc đó để loại nghiệm ngoại lai, ta phải thử lại các nghiệm tìm được.

Đối với phương trình nhiều ẩn, ta cũng có các khái niệm tương tự.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\frac{x+3}{x(x-1)} + \frac{3}{x} = \frac{2-x}{x-1}. \quad (4)$$

Giải. Điều kiện của phương trình (4) là $x \neq 0$ và $x \neq 1$.

Nhân hai vế của phương trình (4) với $x(x-1)$ ta đưa tới phương trình hệ quả

$$(4) \Rightarrow x + 3 + 3(x-1) = x(2-x).$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = 0$$

$$\Rightarrow x(x+2) = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -2$.

Ta thấy $x = 0$ không thoả mãn điều kiện của phương trình (4), đó là nghiệm ngoại lai nên bị loại, còn $x = -2$ thoả mãn điều kiện và là một nghiệm của phương trình (4).

Vậy phương trình (4) có nghiệm duy nhất là $x = -2$.

Bài tập

1. Cho hai phương trình

$$3x = 2 \text{ và } 2x = 3.$$

Cộng các vế tương ứng của hai phương trình đã cho. Hỏi

- Phương trình nhận được có tương đương với một trong hai phương trình đã cho hay không ?
- Phương trình đó có phải là phương trình hệ quả của một trong hai phương trình đã cho hay không ?

2. Cho hai phương trình

$$4x = 5 \text{ và } 3x = 4.$$

Nhân các vế tương ứng của hai phương trình đã cho. Hỏi

- Phương trình nhận được có tương đương với một trong hai phương trình đã cho hay không ?
- Phương trình đó có phải là phương trình hệ quả của một trong hai phương trình đã cho hay không ?

3. Giải các phương trình

$$\text{a) } \sqrt{3-x} + x = \sqrt{3-x} + 1 ; \quad \text{b) } x + \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + 2 ;$$

$$\text{c) } \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{9}{\sqrt{x-1}} ; \quad \text{d) } x^2 - \sqrt{1-x} = \sqrt{x-2} + 3.$$

4. Giải các phương trình

$$\text{a) } x + 1 + \frac{2}{x+3} = \frac{x+5}{x+3} ; \quad \text{b) } 2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1} ;$$

$$\text{c) } \frac{x^2 - 4x - 2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2} ; \quad \text{d) } \frac{2x^2 - x - 3}{\sqrt{2x-3}} = \sqrt{2x-3}.$$