§3 DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

I – ĐỊNH LÍ VỀ DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

1. Nhị thức bậc nhất

> ***Nhị thức bậc nhất*** *đối với x là biểu thức dạng* $f(x) = ax + b$ *trong đó a, b là hai số đã cho,* $a \neq 0$.

1

a) Giải bất phương trình $-2x + 3 > 0$ và biểu diễn trên trục số tập nghiệm của nó.

b) Từ đó hãy chỉ ra các khoảng mà nếu x lấy giá trị trong đó thì nhị thức $f(x) = -2x + 3$ có giá trị

Trái dấu với hệ số của x ;
Cùng dấu với hệ số của x.

2. Dấu của nhị thức bậc nhất

ĐỊNH LÍ

Nhị thức $f(x) = ax + b$ *có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng* $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$, *trái dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng* $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

Chứng minh. Ta có $f(x) = ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$.

Với $x > -\frac{b}{a}$ thì $x + \frac{b}{a} > 0$ nên $f(x) = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ cùng dấu với hệ số a.

Với $x < -\frac{b}{a}$ thì $x + \frac{b}{a} < 0$ nên $f(x) = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ trái dấu với hệ số a.

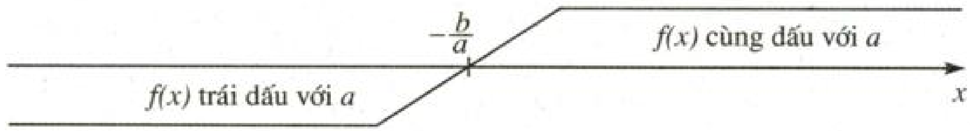
Các kết quả trên được thể hiện qua bảng sau

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

Ta gọi bảng này là *bảng xét dấu* nhị thức $f(x) = ax + b$.

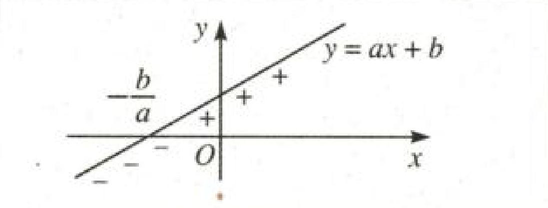
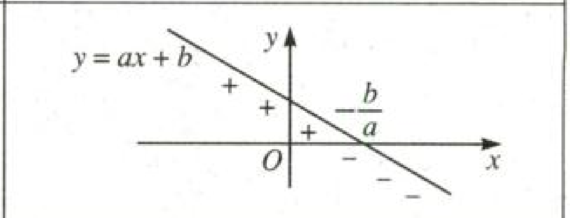
Khi $x = -\dfrac{b}{a}$ nhị thức $f(x) = ax + b$ có giá trị bằng 0, ta nói số $x_0 = -\dfrac{b}{a}$ là nghiệm của nhị thức $f(x)$.

Nghiệm $x_0 = -\dfrac{b}{a}$ của nhị thức chia trục số thành hai khoảng (h.28).



Hình 28

Minh hoạ bằng đồ thị

$a > 0$	$a < 0$
	

3. Áp dụng

2 Xét dấu các nhị thức $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = -2x + 5$.

Ví dụ 1. Xét dấu nhị thức $f(x) = mx - 1$ với m là một tham số đã cho.

Giải. Nếu $m = 0$ thì $f(x) = -1 < 0$, với mọi x.

Nếu $m \neq 0$ thì $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất có nghiệm $x_0 = \dfrac{1}{m}$.

Ta có bảng xét dấu nhị thức $f(x)$ trong hai trường hợp $m > 0$, $m < 0$ như sau

$m > 0$	x	$-\infty$		$\frac{1}{m}$		$+\infty$
	$f(x)$		$-$	0	$+$	

$m < 0$	x	$-\infty$		$\frac{1}{m}$		$+\infty$
	$f(x)$		$+$	0	$-$	

II – XÉT DẤU TÍCH, THƯƠNG CÁC NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Giả sử $f(x)$ là một tích của những nhị thức bậc nhất. Áp dụng định lí về dấu của nhị thức bậc nhất có thể xét dấu từng nhân tử. Lập bảng xét dấu chung cho tất cả các nhị thức bậc nhất có mặt trong $f(x)$ ta suy ra được dấu của $f(x)$. Trường hợp $f(x)$ là một thương cũng được xét tương tự.

Ví dụ 2. Xét dấu biểu thức

$$f(x) = \frac{(4x-1)(x+2)}{-3x+5}.$$

Giải

$f(x)$ không xác định khi $x = \frac{5}{3}$. Các nhị thức $4x - 1$, $x + 2$, $-3x + 5$ có các nghiệm viết theo thứ tự tăng là -2 ; $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{3}$. Các nghiệm này chia khoảng $(-\infty; +\infty)$ thành bốn khoảng, trong mỗi khoảng các nhị thức đang xét có dấu hoàn toàn xác định.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$4x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-3x+5$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	

Từ bảng xét dấu ta thấy

$f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty\,;-2)$ hoặc $x \in \left(\frac{1}{4}\,;\frac{5}{3}\right)$;

$f(x) < 0$ khi $x \in \left(-2\,;\frac{1}{4}\right)$ hoặc $x \in \left(\frac{5}{3}\,;+\infty\right)$;

$f(x) = 0$ khi $x = -2$ hoặc $x = \frac{1}{4}\cdot$

$f(x)$ không xác định khi $x = \frac{5}{3}$ (trong bảng kí hiệu bởi $||$).

3

Xét dấu biểu thức $f(x) = (2x - 1)(-x + 3)$.

III – ÁP DỤNG VÀO GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Giải bất phương trình $f(x) > 0$ thực chất là xét xem biểu thức $f(x)$ nhận giá trị dương với những giá trị nào của x (do đó cũng biết $f(x)$ nhận giá trị âm với những giá trị nào của x), làm như vậy ta nói đã *xét dấu* biểu thức $f(x)$.

1. Bất phương trình tích, bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$\frac{1}{1-x} \geq 1.$$

Giải. Ta biến đổi tương đương bất phương trình đã cho

$$\frac{1}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \geq 0.$$

Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{x}{1-x}$ ta suy ra nghiệm của bất phương trình đã cho là $0 \leq x < 1$.

4

Giải bất phương trình $x^3 - 4x < 0$.

2. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Một trong những cách giải bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối là sử dụng định nghĩa để khử dấu giá trị tuyệt đối. Ta thường phải xét bất phương trình trong nhiều khoảng (nửa khoảng, đoạn) khác nhau, trên đó các biểu thức nằm trong dấu giá trị tuyệt đối đều có dấu xác định.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình

$$|-2x + 1| + x - 3 < 5.$$

Giải.

Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối ta có

$$|-2x + 1| = \begin{cases} -2x + 1 & \text{nếu } -2x + 1 \geq 0 \\ -(-2x + 1) & \text{nếu } -2x + 1 < 0. \end{cases}$$

Do đó ta xét bất phương trình trong hai khoảng

a) Với $x \leq \frac{1}{2}$ ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ (-2x + 1) + x - 3 < 5 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ -x < 7. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm là $-7 < x \leq \frac{1}{2}$.

b) Với $x > \frac{1}{2}$ ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ (2x - 1) + x - 3 < 5 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 3. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm là $\frac{1}{2} < x < 3$.

Tổng hợp lại tập nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp của hai khoảng $\left(-7 ; \frac{1}{2}\right]$ và $\left(\frac{1}{2} ; 3\right)$.

Kết luận. Bất phương trình đã cho có nghiệm là $-7 < x < 3$.

Bằng cách áp dụng tính chất của giá trị tuyệt đối (§1) ta có thể dễ dàng giải các bất phương trình dạng $|f(x)| \le a$ và $|f(x)| \ge a$ với $a > 0$ đã cho.

Ta có

$$\begin{array}{ll} |f(x)| \le a \Leftrightarrow -a \le f(x) \le a & \\ & (a > 0) \\ |f(x)| \ge a \Leftrightarrow f(x) \le -a \text{ hoặc } f(x) \ge a. & \end{array}$$

Bài tập

1. Xét dấu các biểu thức

a) $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$;

b) $f(x) = (-3x - 3)(x + 2)(x + 3)$;

c) $f(x) = \dfrac{-4}{3x+1} - \dfrac{3}{2-x}$;

d) $f(x) = 4x^2 - 1$.

2. Giải các bất phương trình

a) $\dfrac{2}{x-1} \le \dfrac{5}{2x-1}$;

b) $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{(x-1)^2}$;

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+4} < \dfrac{3}{x+3}$;

d) $\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} < 1$.

3. Giải các bất phương trình

a) $|5x - 4| \ge 6$;

b) $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right| < \left|\dfrac{10}{x-1}\right|$.