§5 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

I – ĐỊNH LÍ VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

1. Tam thức bậc hai

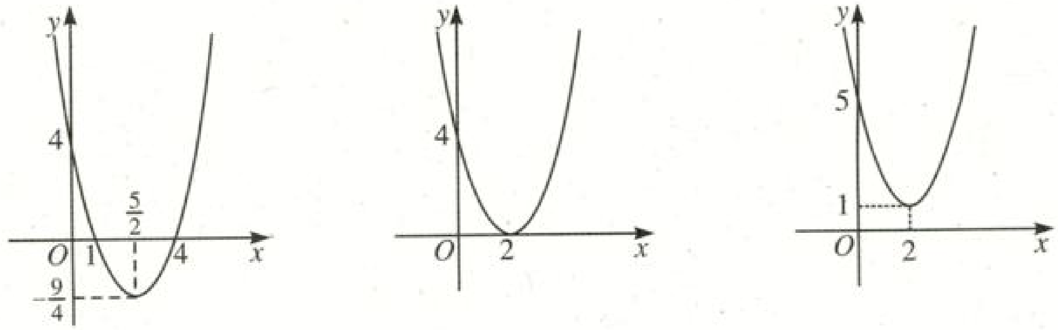
> ***Tam thức bậc hai*** *đối với x là biểu thức có dạng* $f(x) = ax^2 + bx + c$,
> *trong đó a, b, c là những hệ số,* $a \neq 0$.

1

1) Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Tính $f(4), f(2), f(-1), f(0)$ và nhận xét về dấu của chúng.

2) Quan sát đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 4$ (h. 32a)) và chỉ ra các khoảng trên đó đồ thị ở phía trên, phía dưới trục hoành.

3) Quan sát các đồ thị trong hình 32 và rút ra mối liên hệ về dấu của giá trị $f(x) = ax^2 + bx + c$ ứng với x tuỳ theo dấu của biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.



a) $y = f(x) = x^2 - 5x + 4$

b) $y = x^2 - 4x + 4$

c) $y = x^2 - 4x + 5$

Hình 32

2. Dấu của tam thức bậc hai

Người ta đã chứng minh được định lí về *dấu tam thức bậc hai* sau đây

ĐỊNH LÍ

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta < 0$ *thì* $f(x)$ luôn *cùng dấu với hệ số a, với mọi* $x \in \mathbb{R}$.

Nếu $\Delta = 0$ *thì* $f(x)$ *luôn cùng dấu với hệ số a, trừ khi* $x = \dfrac{-b}{2a}$.

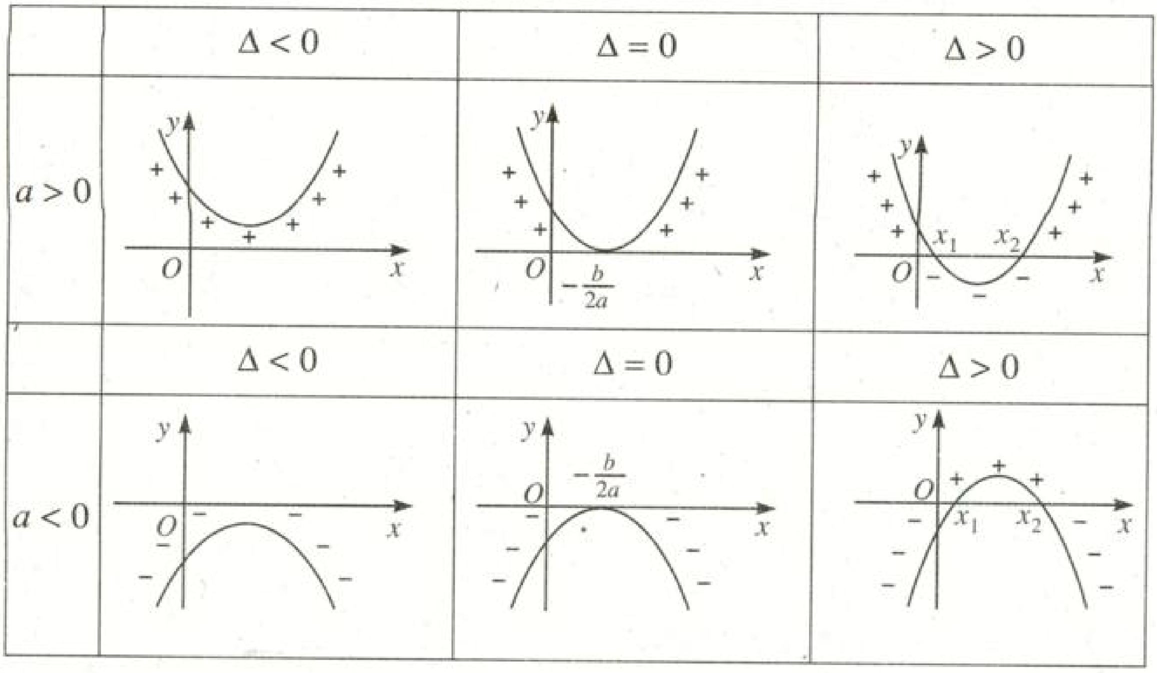
Nếu $\Delta > 0$ *thì* $f(x)$ *cùng dấu với hệ số a khi* $x < x_1$ *hoặc* $x > x_2$, *trái dấu với hệ số a khi* $x_1 < x < x_2$ *trong đó* x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ *là hai nghiệm của* $f(x)$.

CHÚ Ý

Trong định lí trên, có thể thay biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta' = (b')^2 - ac$.

Minh hoạ hình học

Định lí về dấu của tam thức bậc hai có minh hoạ hình học sau (h.33).



Hình 33

3. Áp dụng

Ví dụ 1

a) Xét dấu tam thức $f(x) = -x^2 + 3x - 5$.

b) Lập bảng xét dấu tam thức $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

Giải

a) $f(x)$ có $\Delta = -11 < 0$, hệ số $a = -1 < 0$ nên $f(x) < 0$, với mọi x.

b) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$, hệ số $a = 2 > 0$.

Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2

Xét dấu các tam thức

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$;   b) $g(x) = 9x^2 - 24x + 16$.

Tương tự như tích, thương của những nhị thức bậc nhất, ta có thể xét dấu tích, thương của các tam thức bậc hai.

Ví dụ 2. Xét dấu biểu thức

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 4}.$$

Giải. Xét dấu các tam thức $2x^2 - x - 1$ và $x^2 - 4$ rồi lập bảng xét dấu $f(x)$ ta được

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		+	|	+	0	−	0	+	|	+	
$x^2 - 4$		+	0	−	|	−	|	−	0	+	
$f(x)$		+	||	−	0	+	0	−	||	+	

II – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Bất phương trình bậc hai

> ***Bất phương trình bậc hai ẩn x*** *là bất phương trình dạng* $ax^2 + bx + c < 0$ (*hoặc* $ax^2 + bx + c \le 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \ge 0$), *trong đó* a, b, c *là những số thực đã cho,* $a \ne 0$.

2. Giải bất phương trình bậc hai

Giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$ thực chất là tìm các khoảng mà trong đó $f(x) = ax^2 + bx + c$ cùng dấu với hệ số a (trường hợp $a < 0$) hay trái dấu với hệ số a (trường hợp $a > 0$).

3

Trong các khoảng nào

a) $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ trái dấu với hệ số của x^2 ?

b) $g(x) = -3x^2 + 7x - 4$ cùng dấu với hệ số của x^2 ?

Ví dụ 3. Giải các bất phương trình sau

a) $3x^2 + 2x + 5 > 0$;

b) $-2x^2 + 3x + 5 > 0$;

c) $-3x^2 + 7x - 4 < 0$;

d) $9x^2 - 24x + 16 \geq 0$.

Giải

a) Tam thức $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ có $\Delta' = 1 - 3 \,.\, 5 < 0$, hệ số $a = 3 > 0$ nên $f(x)$ luôn dương (cùng dấu với a).

Do đó tập nghiệm của bất phương trình $3x^2 + 2x + 5 > 0$ là $(-\infty ; +\infty)$.

b) Tam thức $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ có hai nghiệm là $x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{5}{2}$, hệ số $a = -2 < 0$, nên $f(x)$ luôn dương với mọi x thuộc khoảng $\left(-1 ; \dfrac{5}{2}\right)$.

Vậy bất phương trình $-2x^2 + 3x + 5 > 0$ có tập nghiệm là khoảng $\left(-1; \dfrac{5}{2}\right)$.

c) Tam thức $f(x) = -3x^2 + 7x - 4$ có hai nghiệm là $x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{4}{3}$, hệ số $a = -3 < 0$, nên $f(x)$ luôn âm với mọi x thuộc khoảng $(-\infty ; 1)$ hoặc $\left(\dfrac{4}{3} ; +\infty\right)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-3x^2 + 7x - 4 < 0$ là

$$(-\infty; 1) \cup \left(\frac{4}{3} ; +\infty\right).$$

d) Tam thức $f(x) = 9x^2 - 24x + 16$ có hệ số $a = 9$, $\Delta' = 12^2 - 9.16 = 0$, $f(x)$ có nghiệm kép $x = \dfrac{4}{3}$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \neq \dfrac{4}{3}$ và $f(x) = 0$ với $x = \dfrac{4}{3}$.

Vậy bất phương trình $9x^2 - 24x + 16 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi x.

Ví dụ 4. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm trái dấu

$$2x^2 - (m^2 - m + 1)x + 2m^2 - 3m - 5 = 0.$$

Giải. Phương trình bậc hai sẽ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi các hệ số a và c trái dấu, tức là m phải thoả mãn điều kiện

$$2(2m^2 - 3m - 5) < 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 5 < 0.$$

Vì tam thức $f(m) = 2m^2 - 3m - 5$ có hai nghiệm là $m_1 = -1$, $m_2 = \frac{5}{2}$ và hệ số của m^2 dương nên

$$2m^2 - 3m - 5 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{5}{2}.$$

Kết luận. Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $-1 < m < \frac{5}{2}$.

Bài tập

1. Xét dấu các tam thức bậc hai

a) $5x^2 - 3x + 1$;

b) $-2x^2 + 3x + 5$;

c) $x^2 + 12x + 36$;

d) $(2x - 3)(x + 5)$.

2. Lập bảng xét dấu các biểu thức sau

a) $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$;

b) $f(x) = (3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1)$;

c) $f(x) = (4x^2 - 1)(-8x^2 + x - 3)(2x + 9)$;

d) $f(x) = \dfrac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}$.

3. Giải các bất phương trình sau

a) $4x^2 - x + 1 < 0$;

b) $-3x^2 + x + 4 \geq 0$;

c) $\dfrac{1}{x^2 - 4} < \dfrac{3}{3x^2 + x - 4}$;

d) $x^2 - x - 6 \leq 0$.

4. Tìm các giá trị của tham số m để các phương trình sau vô nghiệm

a) $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$;

b) $(3 - m)x^2 - 2(m + 3)x + m + 2 = 0$.