

## §2

# GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

## I – GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CUNG $\alpha$



1

Nhắc lại khái niệm giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ ,  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ .

Ta có thể mở rộng khái niệm giá trị lượng giác cho các cung và góc lượng giác.

### 1. Định nghĩa

Trên đường tròn lượng giác cho cung

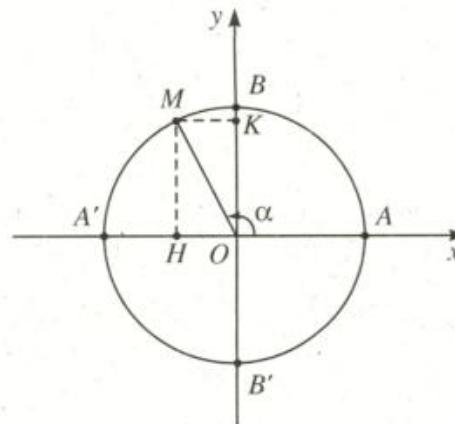
$\widehat{AM}$  có số  $\widehat{AM} = \alpha$  (còn viết  $\widehat{AM} = \alpha$ )  
(h.48).

Tung độ  $y = \overline{OK}$  của điểm  $M$  gọi là sin của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\sin \alpha$ .

$$\sin \alpha = \overline{OK}.$$

Hoành độ  $x = \overline{OH}$  của điểm  $M$  gọi là cosin của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\cos \alpha$ .

$$\cos \alpha = \overline{OH}.$$



Hình 48

Nếu  $\cos \alpha \neq 0$ , tỉ số  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  gọi là tang của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\tan \alpha$  (người ta còn dùng kí hiệu  $\text{tg } \alpha$ )

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Nếu  $\sin \alpha \neq 0$ , tỉ số  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  gọi là cötang của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\cot \alpha$  (người ta còn dùng kí hiệu  $\text{cotg } \alpha$ )

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Các giá trị  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$  được gọi là các **giá trị lượng giác của cung  $\alpha$** .

Ta cũng gọi trục tung là **trục sin**, còn trục hoành là **trục cosin**.

### CHÚ Ý

1. Các định nghĩa trên cũng áp dụng cho các góc lượng giác.
2. Nếu  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  thì các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$  chính là các giá trị lượng giác của góc đó đã nêu trong SGK Hình học 10.



Tính  $\sin \frac{25\pi}{4}$ ,  $\cos(-240^\circ)$ ,  $\tan(-405^\circ)$ .

## 2. Hệ quả

- 1)  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$  xác định với mọi  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + k2\pi) &= \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}; \\ \cos(\alpha + k2\pi) &= \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

- 2) Vì  $-1 \leq \overline{OK} \leq 1$ ;  $-1 \leq \overline{OH} \leq 1$  (h.48) nên ta có

$$\begin{aligned}-1 \leq \sin \alpha &\leq 1 \\ -1 \leq \cos \alpha &\leq 1.\end{aligned}$$

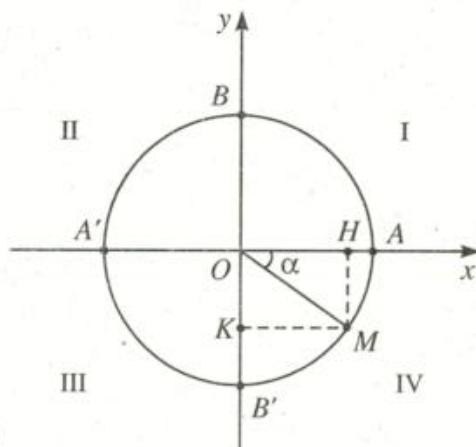
- 3) Với mọi  $m \in \mathbb{R}$  mà  $-1 \leq m \leq 1$  đều tồn tại  $\alpha$  và  $\beta$  sao cho  $\sin \alpha = m$  và  $\cos \beta = m$ .

- 4)  $\tan \alpha$  xác định với mọi  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Thật vậy,  $\tan \alpha$  không xác định khi và chỉ khi  $\cos \alpha = 0$ , tức là điểm cuối  $M$  của cung  $\widehat{AM}$  trùng với  $B$  hoặc  $B'$  (h.48), hay  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

- 5)  $\cot \alpha$  xác định với mọi  $\alpha \neq k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Lập luận tương tự 4).

- 6) Dấu của các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$  phụ thuộc vào vị trí điểm cuối của cung  $\widehat{AM} = \alpha$  trên đường tròn lượng giác (h.49).



Hình 49

Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác

Góc phân tư Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

### 3. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

## II – Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA TANG VÀ CÔTANG



Từ định nghĩa của  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$ , hãy phát biểu ý nghĩa hình học của chúng.

### 1. Ý nghĩa hình học của $\tan \alpha$

Từ A vẽ tiếp tuyến  $t'At$  với đường tròn lượng giác. Ta coi tiếp tuyến này là một trục số bằng cách chọn gốc tại A và vectơ đơn vị  $\vec{i} = \overrightarrow{OB}$ .

Cho cung lượng giác  $\widehat{AM}$  có số đo là  $\alpha$  ( $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ). Gọi  $T$  là giao điểm của  $OM$  với trục  $t'At$  (h.50).

Giả sử  $T$  không trùng với  $A$ . Vì  $MH \parallel AT$ , ta có  $\frac{AT}{HM} = \frac{OA}{OH}$ . Từ đó suy ra

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{HM}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OH}}. \quad (1)$$

Vì  $\overline{HM} = \sin \alpha$ ,  $\overline{OH} = \cos \alpha$  và  $\overline{OA} = 1$   
nên từ (1) suy ra

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\overline{HM}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \overline{AT}.$$

Khi  $T$  trùng  $A$  thì  $\alpha = k\pi$  và  $\tan \alpha = 0$ . Vậy

$$\boxed{\tan \alpha = \overline{AT}.}$$

||  $\tan \alpha$  được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ  $\overrightarrow{AT}$  trên trục  $t'At$ .  
Trục  $t'At$  được gọi là **trục tang**.

## 2. Ý nghĩa hình học của $\cot \alpha$

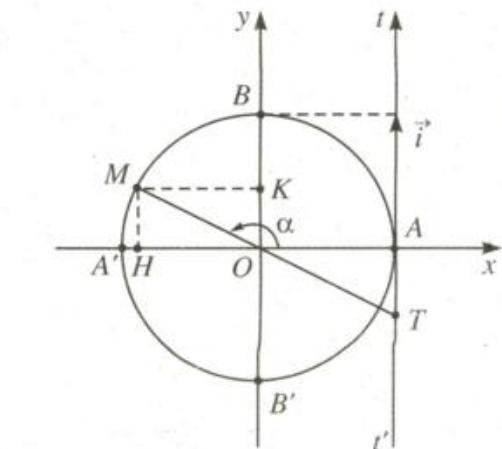
Từ  $B$  vẽ tiếp tuyến  $s'Bs$  với đường tròn lượng giác và xác định trên tiếp tuyến này một trục có gốc tại  $B$  và vectơ đơn vị bằng  $\overrightarrow{OA}$ .

Cho cung lượng giác  $\widehat{AM}$  có số đo là  $\alpha$  ( $\alpha \neq k\pi$ ).

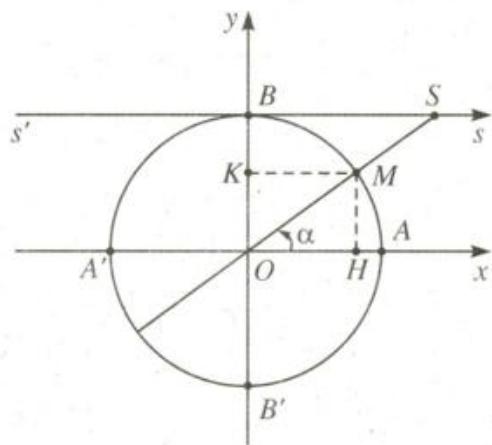
Gọi  $S$  là giao điểm của  $OM$  và trục  $s'Bs$  (h.51).

Lí luận tương tự mục trên, ta có

$$\boxed{\cot \alpha = \overline{BS}.}$$



Hình 50



Hình 51

||  $\cot \alpha$  được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ  $\overrightarrow{BS}$  trên trục  $s'Bs$ . Trục  $s'Bs$  được gọi là **trục cötang**.



4

Từ ý nghĩa hình học của  $\tan \alpha$  và  $\cot \alpha$  hãy suy ra với mọi số nguyên  $k$ ,  
 $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$ ,  $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$ .

### III – QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

#### 1. Công thức lượng giác cơ bản

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$



5

Từ định nghĩa của  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  hãy chứng minh hằng đẳng thức đầu tiên, từ đó suy ra các hằng đẳng thức còn lại.

#### 2. Ví dụ áp dụng

**Ví dụ 1.** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , với  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Tính  $\cos \alpha$ .

**Giải.** Ta có  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$ , do đó  $\cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$ .

Vì  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  nên điểm cuối của cung  $\alpha$  thuộc cung phần tư thứ II, do đó  $\cos \alpha < 0$ .

Vậy  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ .

**Ví dụ 2.** Cho  $\tan \alpha = -\frac{4}{5}$ , với  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$ .

*Giải.* Ta có

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{16}{25}} = \frac{25}{41}$$

suy ra  $\cos \alpha = \frac{\pm 5}{\sqrt{41}}$ .

Vì  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$  nên điểm cuối của cung  $\alpha$  nằm ở cung phần tư thứ IV, do

đó  $\cos \alpha > 0$ . Vậy  $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$ .

$$\text{Từ đó } \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = -\frac{4}{\sqrt{41}}.$$

**Ví dụ 3.** Cho  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos^3 \alpha} = \tan^3 \alpha + \tan^2 \alpha + \tan \alpha + 1.$$

*Giải.* Vì  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  nên  $\cos \alpha \neq 0$ , do đó cả hai vế của đẳng thức cần chứng minh đều có nghĩa. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos^3 \alpha} &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= (1 + \tan^2 \alpha)(1 + \tan \alpha) \\ &= \tan^3 \alpha + \tan^2 \alpha + \tan \alpha + 1. \end{aligned}$$

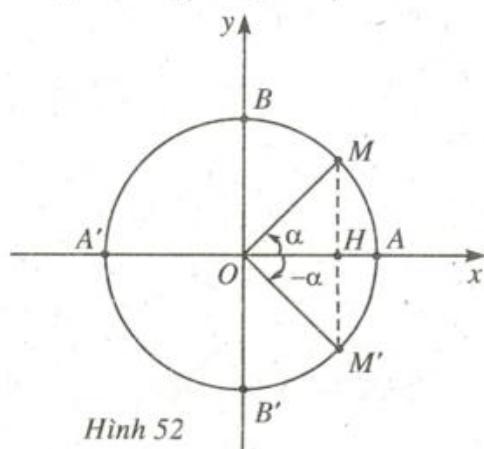
### 3. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

1) *Cung đối nhau* :  $\alpha$  và  $-\alpha$ .

Các điểm cuối của hai cung  $\alpha = \widehat{AM}$

và  $-\alpha = \widehat{A'M'}$  đối xứng nhau qua trục hoành (h.52), nên ta có

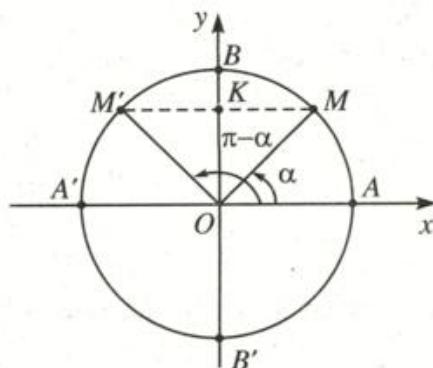
$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha. \end{aligned}$$



2) **Cung bù nhau :  $\alpha$  và  $\pi - \alpha$ .**

Các điểm cuối của hai cung  $\alpha = \widehat{AM}$  và  $\pi - \alpha = \widehat{AM'}$  đối xứng nhau qua trục tung (h.53), nên ta có

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha.\end{aligned}$$

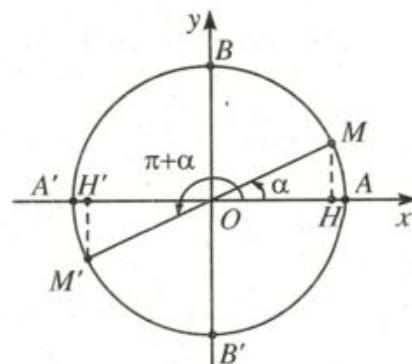


Hình 53

3) **Cung hơn kém  $\pi$  :  $\alpha$  và  $(\alpha + \pi)$ .**

Các điểm cuối của hai cung  $\alpha$  và  $(\alpha + \pi)$  đối xứng nhau qua gốc toạ độ  $O$  (h.54), nên ta có

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \pi) &= -\sin \alpha \\ \cos(\alpha + \pi) &= -\cos \alpha \\ \tan(\alpha + \pi) &= \tan \alpha \\ \cot(\alpha + \pi) &= \cot \alpha.\end{aligned}$$

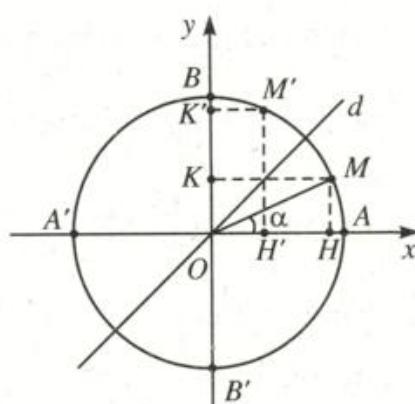


Hình 54

4) **Cung phụ nhau :  $\alpha$  và  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ .**

Các điểm cuối của hai cung  $\alpha$  và  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  đối xứng nhau qua phân giác  $d$  của góc  $xOy$  (h.55), nên ta có

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha.\end{aligned}$$



Hình 55



Tính  $\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$ ,  $\tan\frac{31\pi}{6}$ ,  $\sin(-1380^\circ)$ .

## Bài tập

1. Có cung  $\alpha$  nào mà  $\sin\alpha$  nhận các giá trị tương ứng sau đây không ?
  - a)  $-0,7$  ;
  - b)  $\frac{4}{3}$ ;
  - c)  $-\sqrt{2}$  ;
  - d)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .
2. Các đẳng thức sau có thể đồng thời xảy ra không ?
  - a)  $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$  và  $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$  ;
  - b)  $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$  và  $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$  ;
  - c)  $\sin\alpha = 0,7$  và  $\cos\alpha = 0,3$ .
3. Cho  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Xác định dấu của các giá trị lượng giác
  - a)  $\sin(\alpha - \pi)$  ;
  - b)  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ ;
  - c)  $\tan(\alpha + \pi)$  ;
  - d)  $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ .
4. Tính các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , nếu
  - a)  $\cos\alpha = \frac{4}{13}$  và  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ;
  - b)  $\sin\alpha = -0,7$  và  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  ;
  - c)  $\tan\alpha = -\frac{15}{7}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  ;
  - d)  $\cot\alpha = -3$  và  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ .
5. Tính  $\alpha$ , biết
  - a)  $\cos\alpha = 1$  ;
  - b)  $\cos\alpha = -1$  ;
  - c)  $\cos\alpha = 0$  ;
  - d)  $\sin\alpha = 1$  ;
  - e)  $\sin\alpha = -1$  ;
  - f)  $\sin\alpha = 0$ .