§3 HÀM SỐ BẬC HAI

Hàm số bậc hai được cho bởi công thức

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0).$$

Tập xác định của hàm số này là $D = \mathbb{R}$.

Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ đã học ở lớp 9 là một trường hợp riêng của hàm số này.

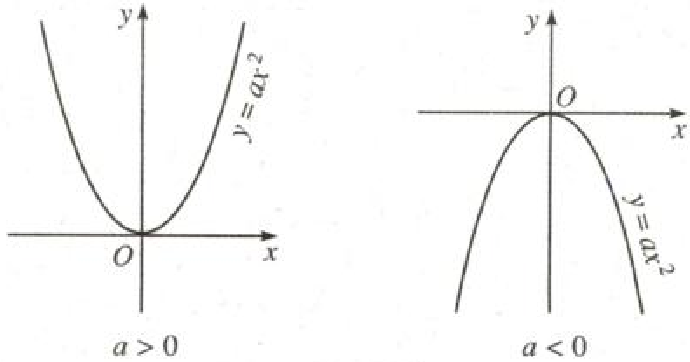
I – ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

1

Nhắc lại các kết quả đã biết về đồ thị của hàm số $y = ax^2$.

1. Nhận xét

1) Điểm $O(0\ ;\ 0)$ là đỉnh của parabol $y = ax^2$. Đó là điểm thấp nhất của đồ thị trong trường hợp $a > 0$ ($y \geq 0$ với mọi x), và là điểm cao nhất của đồ thị trong trường hợp $a < 0$ ($y \leq 0$ với mọi x) (h.20).



Hình 20

2) Thực hiện phép biến đổi đã biết ở lớp 9, ta có thể viết

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}, \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Từ đó ta có nhận xét sau

Nếu $x = -\dfrac{b}{2a}$ thì $y = \dfrac{-\Delta}{4a}$. Vậy điểm $I\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Nếu $a > 0$ thì $y \geq \dfrac{-\Delta}{4a}$ với mọi x, do đó I là điểm thấp nhất của đồ thị.

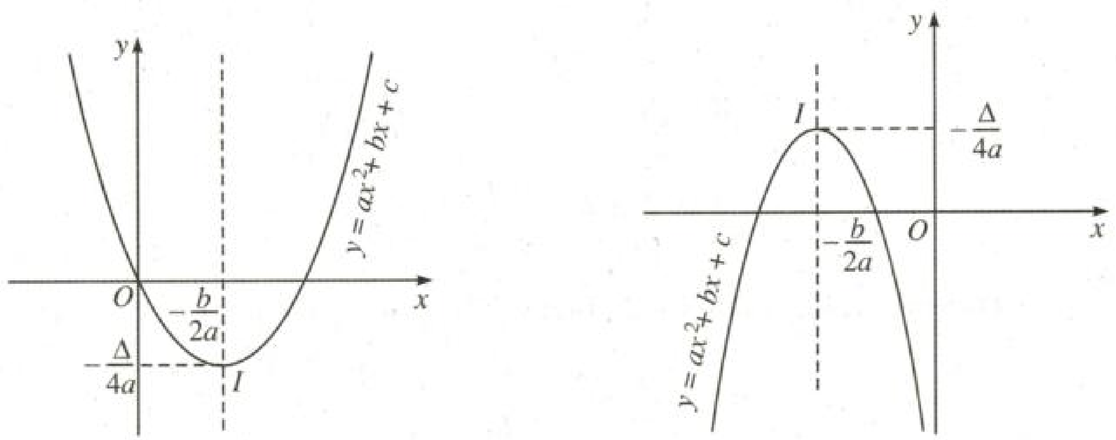
Nếu $a < 0$ thì $y \leq \dfrac{-\Delta}{4a}$ với mọi x, do đó I là điểm cao nhất của đồ thị.

Như vậy, điểm $I\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$ đối với đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ đóng vai trò như đỉnh $O(0\ ;\ 0)$ của parabol $y = ax^2$.

2. Đồ thị

Dưới đây (xem bài đọc thêm) ta sẽ thấy đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ chính là đường parabol $y = ax^2$ sau một số phép "dịch chuyển" trên mặt phẳng toạ độ.

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *là một đường parabol có đỉnh là điểm* $I\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$, *có trục đối xứng là đường thẳng* $x = -\dfrac{b}{2a}$. *Parabol này quay bề lõm lên trên nếu* $a > 0$, *xuống dưới nếu* $a < 0$ (h.21).



$a > 0$ $\qquad$ $a < 0$

Hình 21

3. Cách vẽ

Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta thực hiện các bước

1) *Xác định toạ độ của đỉnh* $I\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.

2) *Vẽ trục đối xứng* $x = -\dfrac{b}{2a}$.

3) *Xác định toạ độ các giao điểm của parabol với trục tung (điểm* $(0\ ;\ c)$*) và trục hoành (nếu có).*

Xác định thêm một số điểm thuộc đồ thị, chẳng hạn điểm đối xứng với điểm $(0\ ;\ c)$ qua trục đối xứng của parabol, để vẽ đồ thị chính xác hơn.

4) *Vẽ parabol.*

Khi vẽ parabol cần chú ý đến dấu của hệ số a ($a > 0$ bề lõm quay lên trên, $a < 0$ bề lõm quay xuống dưới).

Ví dụ. Vẽ parabol $y = 3x^2 - 2x - 1$.

Ta có

Đỉnh $I\left(\frac{1}{3}; \frac{-4}{3}\right)$;

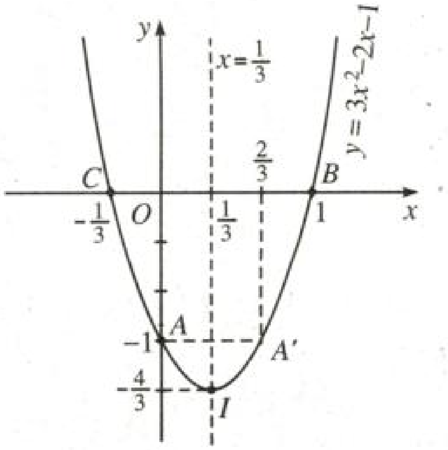
Trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{1}{3}$;

Giao điểm với Oy là $A(0; -1)$;

Điểm đối xứng với điểm $A(0; -1)$ qua đường thẳng $x = \frac{1}{3}$ là $A'\left(\frac{2}{3}; -1\right)$.

Giao điểm với Ox là $B(1; 0)$ và $C\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$.

Đồ thị như hình 22.



Hình 22

2 Vẽ parabol $y = -2x^2 + x + 3$.

II – CHIỀU BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta có bảng biến thiên của nó trong hai trường hợp $a > 0$ và $a < 0$ như sau

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\nearrow$ $+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\searrow$ $-\infty$

Từ đó ta có định lí dưới đây

ĐỊNH LÍ

Nếu $a > 0$ *thì hàm số* $y = ax^2 + bx + c$

Nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty ; \frac{-b}{2a}\right)$;

Đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-b}{2a} ; +\infty\right)$.

Nếu $a < 0$ *thì hàm số* $y = ax^2 + bx + c$

Đồng biến trên khoảng $\left(-\infty ; \frac{-b}{2a}\right)$;

Nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-b}{2a} ; +\infty\right)$.

BÀI ĐỌC THÊM

ĐƯỜNG PARABOL

Trong §3, ta đã khẳng định rằng đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là một đường parabol. Dưới đây ta sẽ chứng tỏ điều đó và cho thấy đường parabol này được suy ra từ parabol $y = ax^2$ như thế nào.

1. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + y_0$

Xét hai hàm số $f(x) = ax^2$ và $g(x) = ax^2 + y_0$.

Tại cùng một điểm $X \in \mathbb{R}$ ta có

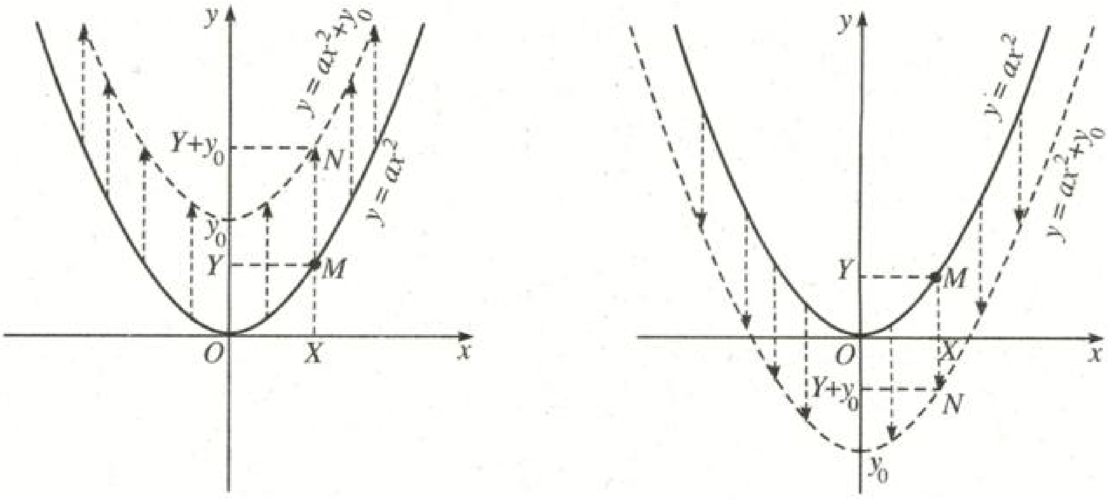
$$Y = f(X) = aX^2 \text{ , } g(X) = aX^2 + y_0 = Y + y_0.$$

Do đó, nếu điểm $M(X ; Y)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = ax^2$ thì điểm $N(X ; Y + y_0)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = ax^2 + y_0$.

Ta thấy nếu dịch chuyển (tịnh tiến) điểm $M(X ; Y)$ song song với trục tung một đoạn bằng $|y_0|$ đơn vị (lên trên nếu $y_0 > 0$, xuống dưới nếu $y_0 < 0$) thì được điểm $N(X ; Y + y_0)$.

Vậy

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + y_0$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ nhờ phép tịnh tiến song song với trục tung $|y_0|$ đơn vị, lên trên nếu $y_0 > 0$, xuống dưới nếu $y_0 < 0$ (h.23).



$y_0 > 0$ $\qquad\qquad$ $y_0 < 0$

Hình 23

2. Đồ thị của hàm số $y = a(x + x_0)^2$

Xét hai hàm số

$$f(x) = ax^2 \text{ và } g(x) = a(x + x_0)^2.$$

Với X tuỳ ý, ta có

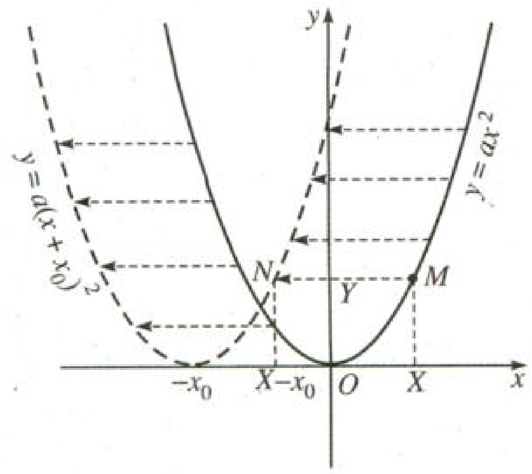
$$f(X) = aX^2,\ g(X - x_0) = a[(X - x_0) + x_0]^2 = aX^2.$$

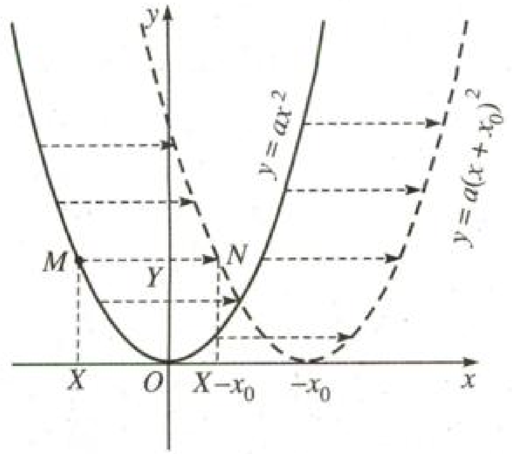
Nghĩa là, giá trị của hàm số $f(x)$ tại X bằng giá trị của hàm số $g(x)$ tại $X - x_0$. Vậy nếu điểm $M(X\,;\,Y)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = ax^2$ thì điểm $N(X - x_0\,;\,Y)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = a(x + x_0)^2$.

Ta thấy, nếu tịnh tiến điểm $M(X\,;\,Y)$ song song với trục hoành $|x_0|$ đơn vị về bên trái nếu $x_0 > 0$, về bên phải nếu $x_0 < 0$ thì được điểm $N(X - x_0\,;\,Y)$.

Vậy

Đồ thị của hàm số $y = a(x + x_0)^2$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ nhờ phép tịnh tiến song song với trục hoành $|x_0|$ đơn vị, về bên trái nếu $x_0 > 0$, về bên phải nếu $x_0 < 0$ (h.24).





Hình 24

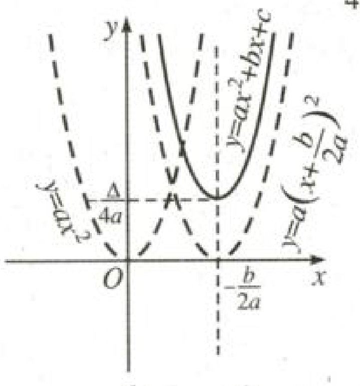
3. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$

Thực hiện phép biến đổi đã biết ở lớp 9, ta có thể viết

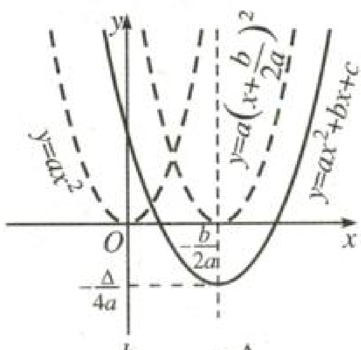
$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Áp dụng các kết quả trên với $x_0 = \frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{-\Delta}{4a}$ ta thấy

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ được suy ra từ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ trước hết nhờ phép tịnh tiến song song với trục hoành $\left|\frac{b}{2a}\right|$ đơn vị, về bên trái nếu $\frac{b}{2a} > 0$, về bên phải nếu $\frac{b}{2a} < 0$, sau đó nhờ phép tịnh tiến song song với trục tung $\left|\frac{-\Delta}{4a}\right|$ đơn vị, lên trên nếu $\frac{-\Delta}{4a} > 0$, xuống dưới nếu $\frac{-\Delta}{4a} < 0$ (h.25).



$a > 0,\ \frac{b}{2a} < 0,\ \frac{-\Delta}{4a} > 0$



$a > 0,\ \frac{b}{2a} < 0,\ \frac{-\Delta}{4a} < 0$

Hình 25

Như vậy, đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ cũng là một đường parabol.

Trong đời sống hằng ngày chúng ta thường gặp những hình ảnh của đường parabol, như khi ta ngắm các đài phun nước, hoặc chiêm ngưỡng cảnh bắn pháo hoa muôn màu, muôn sắc. Nhiều công trình kiến trúc cũng được tạo dáng theo hình parabol, như cây cầu, vòm nhà, cổng ra vào,... Điều đó không chỉ bảo đảm tính bền vững mà còn tạo nên vẻ đẹp của công trình.

Bài tập

1. Xác định toạ độ của đỉnh và các giao điểm với trục tung, trục hoành (nếu có) của mỗi parabol

a) $y = x^2 - 3x + 2$; b) $y = -2x^2 + 4x - 3$;

c) $y = x^2 - 2x$; d) $y = -x^2 + 4$.

2. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số

a) $y = 3x^2 - 4x + 1$; b) $y = -3x^2 + 2x - 1$;

c) $y = 4x^2 - 4x + 1$; d) $y = -x^2 + 4x - 4$;

e) $y = 2x^2 + x + 1$; f) $y = -x^2 + x - 1$.

3. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1 ; 5)$ và $N(-2 ; 8)$;

b) Đi qua điểm $A(3 ; -4)$ và có trục đối xứng là $x = -\dfrac{3}{2}$;

c) Có đỉnh là $I(2 ; -2)$;

d) Đi qua điểm $B(-1 ; 6)$ và tung độ của đỉnh là $-\dfrac{1}{4}$.

4. Xác định a, b, c biết parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(8 ; 0)$ và có đỉnh là $I(6 ; -12)$.