§1 HÀM SỐ

I – ÔN TẬP VỀ HÀM SỐ

1. Hàm số. Tập xác định của hàm số

Giả sử có hai đại lượng biến thiên x và y, trong đó x nhận giá trị thuộc tập số D.

> *Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực* $\mathbb{R}$ *thì ta có một* ***hàm số.***
>
> *Ta gọi x là* ***biến số*** *và y là* ***hàm số*** *của x.*
>
> *Tập hợp D được gọi là* ***tập xác định*** *của hàm số.*

Ví dụ 1

Bảng dưới đây trích từ trang web của Hiệp hội liên doanh Việt Nam – Thái Lan ngày 26 – 10 – 2005 về thu nhập bình quân đầu người (TNBQĐN) của nước ta từ năm 1995 đến năm 2004.

Năm	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2004
TNBQĐN (tính theo USD)	200	282	295	311	339	363	375	394	564

Bảng này thể hiện sự phụ thuộc giữa thu nhập bình quân đầu người (kí hiệu là y) và thời gian x (tính bằng năm).

Với mỗi giá trị $x \in D = \{1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2004\}$ *có một giá trị duy nhất* y.

Vậy ta có một hàm số. Tập hợp D là tập xác định của hàm số này.

Các giá trị $y = 200$; 282 ; 295 ; ... được gọi là các *giá trị của hàm số*, tương ứng, tại $x = 1995$; 1996 ; 1997 ; ...

1

Hãy nêu một ví dụ thực tế về hàm số.

2. Cách cho hàm số

Một hàm số có thể được cho bằng các cách sau.

Hàm số cho bằng bảng

Hàm số trong ví dụ trên là một hàm số được cho bằng bảng.

2

Hãy chỉ ra các giá trị của hàm số trên tại $x = 2001$; 2004 ; 1999.

Hàm số cho bằng biểu đồ

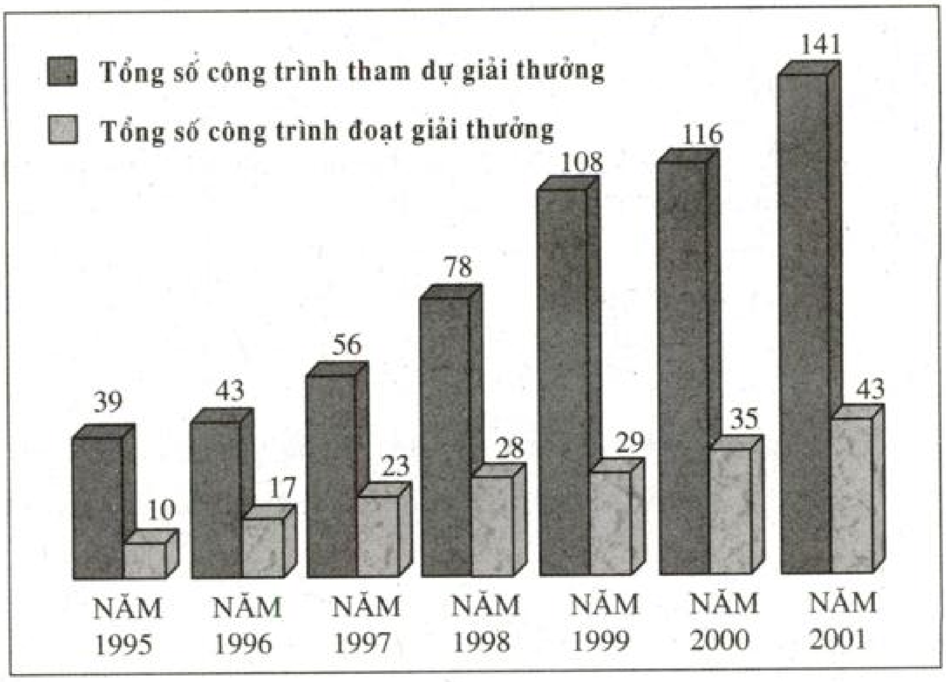
Ví dụ 2. Biểu đồ dưới (h.13) (trích từ báo Khoa học và Đời sống số 47 ngày 8 – 11 – 2002) mô tả số công trình khoa học kĩ thuật đăng kí dự giải thưởng Sáng tạo Khoa học Công nghệ Việt Nam và số công trình đoạt giải hàng năm từ 1995 đến 2001.

Biểu đồ này xác định hai hàm số trên cùng tập xác định

$$D = \{1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001\}.$$

3

Hãy chỉ ra các giá trị của mỗi hàm số trên tại các giá trị $x \in D$.



Hình 13

Hàm số cho bằng công thức

4

Hãy kể các hàm số đã học ở Trung học cơ sở.

Các hàm số $y = ax + b$, $y = \dfrac{a}{x}$, $y = ax^2$ là những hàm số được cho bởi công thức.

Khi cho hàm số bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định của nó thì ta có quy ước sau

Tập xác định của hàm số y = f(x) *là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa.*

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{x-3}$.

Giải. Biểu thức $\sqrt{x-3}$ có nghĩa khi $x - 3 \geq 0$, tức là khi $x \geq 3$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = [3\,;+\infty)$.

5

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $g(x) = \dfrac{3}{x+2}$;

b) $h(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$.

CHÚ Ý

Một hàm số có thể được cho bởi hai, ba,... công thức. Chẳng hạn, cho hàm số

$$y = \begin{cases} 2x+1 & \text{với } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{với } x < 0 \end{cases}$$

nghĩa là với $x \geq 0$ hàm số được xác định bởi biểu thức $f(x) = 2x + 1$, với $x < 0$ hàm số được xác định bởi biểu thức $g(x) = -x^2$.

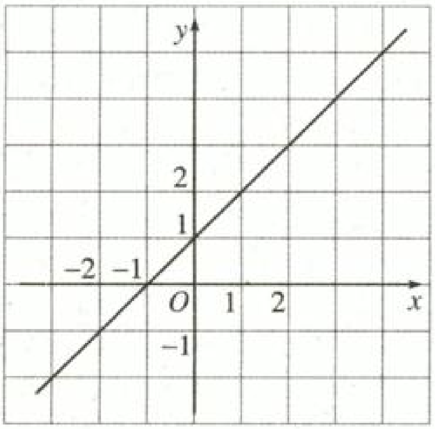
6

Tính giá trị của hàm số ở chú ý trên tại $x = -2$ và $x = 5$.

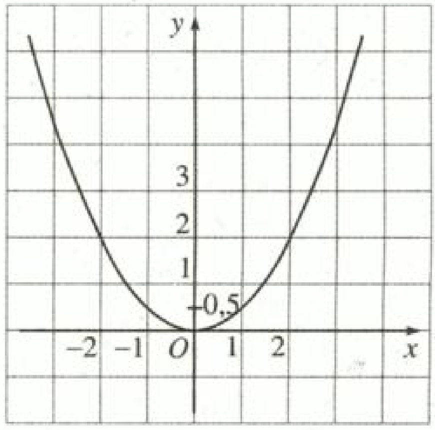
3. Đồ thị của hàm số

Đồ thị *của hàm số y = f(x) xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm M(x ; f(x)) trên mặt phẳng toạ độ với mọi x* thuộc *D.*

Ví dụ 4. Trong Sách giáo khoa Toán 9, ta đã biết đồ thị của hàm số bậc nhất $y = ax + b$ là một đường thẳng, đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2$ là một đường parabol.



Đồ thị hàm số $f(x) = x + 1$



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

Hình 14

7

Dựa vào đồ thị của hai hàm số đã cho trong hình 14

$$y = f(x) = x + 1 \text{ và } y = g(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{ hãy}$$

a) Tính $f(-2), f(-1), f(0), f(2), g(-1), g(-2), g(0)$;

b) Tìm x, sao cho $f(x) = 2$;

Tìm x, sao cho $g(x) = 2$.

Ta thường gặp trường hợp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một đường (đường thẳng, đường cong, ...). Khi đó, ta nói $y = f(x)$ là *phương trình* của đường đó. Chẳng hạn

$y = ax + b$ là phương trình của một đường thẳng.

$y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là phương trình của một đường parabol.

II – SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

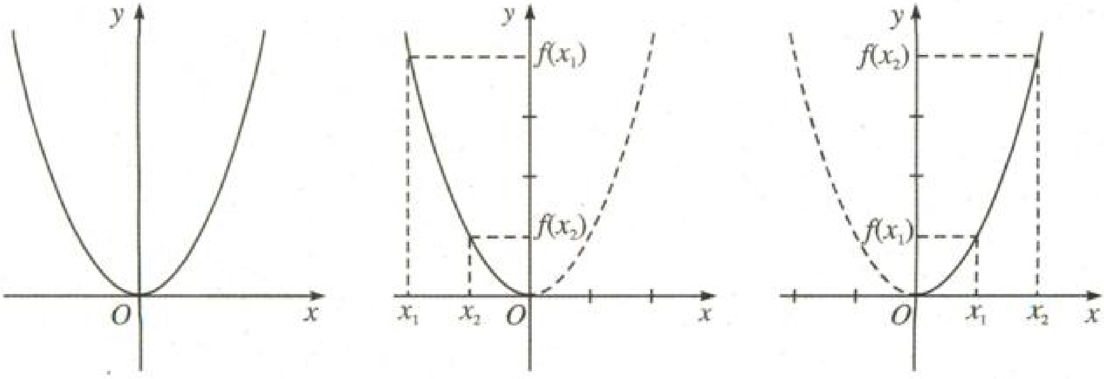
1. Ôn tập

Xét đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2$ (h.15a). Ta thấy trên khoảng $(-\infty ; 0)$ đồ thị "đi xuống" từ trái sang phải (h.15b) và với

$$x_1, x_2 \in (-\infty ; 0), x_1 < x_2 \text{ thì } f(x_1) > f(x_2).$$

Như vậy, khi giá trị của biến số *tăng* thì giá trị của hàm số *giảm*.

Ta nói hàm số $y = x^2$ *nghịch biến* trên khoảng $(-\infty ; 0)$.



a) b) c)

Hình 15

Trên khoảng $(0 ; +\infty)$ đồ thị "đi lên" từ trái sang phải (h.15c) và với

$$x_1, x_2 \in (0 ; +\infty) ; \ x_1 < x_2 \text{ thì } f(x_1) < f(x_2).$$

Như vậy, khi giá trị của biến số *tăng* thì giá trị của hàm số cũng *tăng*.

Ta nói hàm số $y = x^2$ *đồng biến* trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

CHÚ Ý

Khi $x > 0$ và nhận các giá trị lớn tuỳ ý thì ta nói x dần tới $+\infty$.

Khi $x < 0$ và $|x|$ nhận các giá trị lớn tuỳ ý thì ta nói x dần tới $-\infty$.

Ta thấy khi x dần tới $+\infty$ hay $-\infty$ thì x^2 dần tới $+\infty$.

Tổng quát

*Hàm số $y = f(x)$ gọi là **đồng biến (tăng)** trên khoảng $(a ; b)$ nếu*

$$\forall x_1, x_2 \in (a ; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

*Hàm số $y = f(x)$ gọi là **nghịch biến (giảm)** trên khoảng $(a ; b)$ nếu*

$$\forall x_1, x_2 \in (a ; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

2. Bảng biến thiên

Xét chiều biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng đồng biến và các khoảng nghịch biến của nó. Kết quả xét chiều biến thiên được tổng kết trong một bảng gọi là ***bảng biến thiên***.

Ví dụ 5. Dưới đây là bảng biến thiên của hàm số $y = x^2$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Hàm số $y = x^2$ xác định trên khoảng (hoặc trong khoảng) $(-\infty\ ;\ +\infty)$ và khi x dần tới $+\infty$ hoặc dần tới $-\infty$ thì y đều dần tới $+\infty$.

Tại $x = 0$ thì $y = 0$.

Để diễn tả hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ 0)$ *ta vẽ mũi tên đi xuống (từ* $+\infty$ *đến* 0*).*

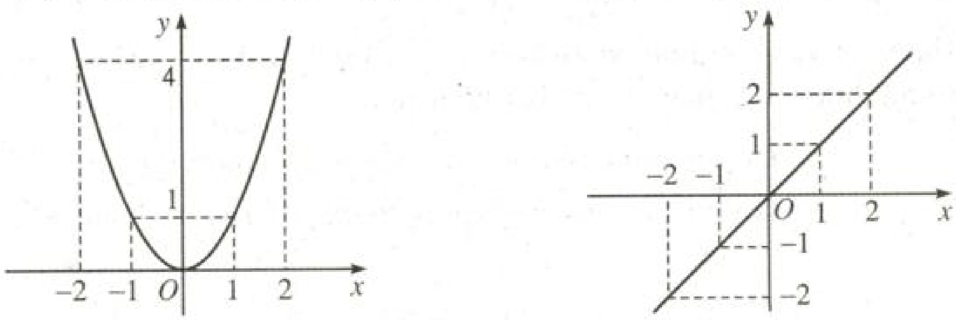
Để diễn tả hàm số đồng biến trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$ *ta vẽ mũi tên đi lên (từ* 0 *đến* $+\infty$*).*

Nhìn vào bảng biến thiên, ta sơ bộ hình dung được đồ thị hàm số (đi lên trong khoảng nào, đi xuống trong khoảng nào).

III – TÍNH CHẴN LẺ CỦA HÀM SỐ

1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Xét đồ thị của hai hàm số $y = f(x) = x^2$ và $y = g(x) = x$ (h.16).



Đồ thị hàm số $y = x^2$ *Đồ thị hàm số* $y = x$

Hình 16

Đường parabol $y = x^2$ có *trục đối xứng* là Oy. Tại hai giá trị đối nhau của biến số x, hàm số nhận cùng một giá trị

$$f(-1) = f(1) = 1, f(-2) = f(2) = 4, \ldots$$

Gốc toạ độ O là *tâm đối xứng* của đường thẳng $y = x$. Tại hai giá trị đối nhau của biến số x, hàm số nhận hai giá trị đối nhau

$$g(-1) = -g(1), g(-2) = -g(2), \ldots$$

Hàm số $y = x^2$ là một ví dụ về *hàm số chẵn*.

Hàm số $y = x$ là một ví dụ về *hàm số lẻ*.

Tổng quát

> *Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là* ***hàm số chẵn*** *nếu*
>
> $$\forall x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = f(x).$$
>
> *Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là* ***hàm số lẻ*** *nếu*
>
> $$\forall x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = -f(x).$$

8

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số

a) $y = 3x^2 - 2$; b) $y = \dfrac{1}{x}$; c) $y = \sqrt{x}$.

CHÚ Ý

Một hàm số không nhất thiết phải là hàm số chẵn hoặc hàm số lẻ. Chẳng hạn, hàm số $y = 2x + 1$ không là hàm số chẵn, cũng không là hàm số lẻ vì giá trị của nó tại $x = 1$ và $x = -1$ tương ứng là 3 và -1. Hai giá trị này không bằng nhau và cũng không đối nhau.

2. Đồ thị của hàm số chẵn, hàm số lẻ

Nhận xét về đồ thị của hàm số $y = x^2$ và $y = x$ trong mục 1 cũng đúng cho trường hợp tổng quát. Ta có kết luận sau

Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

Đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

Bài tập

1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \dfrac{3x - 2}{2x + 1}$; b) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2x - 3}$; c) $y = \sqrt{2x + 1} - \sqrt{3 - x}$.

2. Cho hàm số

$$y = \begin{cases} x + 1 & \text{với} \quad x \geq 2 \\ x^2 - 2 & \text{với} \quad x < 2. \end{cases}$$

Tính giá trị của hàm số đó tại $x = 3$; $x = -1$; $x = 2$.

3. Cho hàm số $y = 3x^2 - 2x + 1$. Các điểm sau có thuộc đồ thị của hàm số đó không ?

a) $M(-1\ ;\ 6)$;

b) $N(1\ ;\ 1)$;

c) $P(0\ ;\ 1)$.

4. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số

a) $y = |x|$;

b) $y = (x + 2)^2$;

c) $y = x^3 + x$;

d) $y = x^2 + x + 1$.