§2 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

I – ÔN TẬP VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

1. Phương trình bậc nhất

Cách giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$ được tóm tắt trong bảng sau

$ax + b = 0$ (1)		
Hệ số		Kết luận
$a \neq 0$		(1) *có nghiệm duy nhất* $x = -\dfrac{b}{a}$
$a = 0$	$b \neq 0$	(1) *vô nghiệm*
	$b = 0$	(1) *nghiệm đúng với mọi x*

Khi $a \neq 0$ phương trình $ax + b = 0$ được gọi là *phương trình bậc nhất một ẩn*.

1

Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

$$m(x - 4) = 5x - 2.$$

2. Phương trình bậc hai

Cách giải và công thức nghiệm của phương trình bậc hai được tóm tắt trong bảng sau

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ (2)	
$\Delta = b^2 - 4ac$	Kết luận
$\Delta > 0$	(2) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	(2) có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	(2) vô nghiệm

2

Lập bảng trên với biệt thức thu gọn Δ'.

3. Định lí Vi-ét

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $uv = P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

3

Khẳng định "Nếu a và c trái dấu thì phương trình (2) có hai nghiệm và hai nghiệm đó trái dấu" có đúng không ? Tại sao ?

II – PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

Có nhiều phương trình khi giải có thể biến đổi về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai. Sau đây ta xét hai trong các dạng phương trình đó.

1. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối ta có thể dùng định nghĩa của giá trị tuyệt đối hoặc bình phương hai vế để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$|x - 3| = 2x + 1. \qquad (3)$$

Giải

Cách 1

a) Nếu $x \geq 3$ thì phương trình (3) trở thành $x - 3 = 2x + 1$. Từ đó $x = -4$.

Giá trị $x = -4$ không thoả mãn điều kiện $x \geq 3$ nên bị loại.

b) Nếu $x < 3$ thì phương trình (3) trở thành $-x + 3 = 2x + 1$. Từ đó $x = \frac{2}{3}$.

Giá trị này thoả mãn điều kiện $x < 3$ nên là nghiệm.

Kết luận. Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{2}{3}$.

Cách 2. Bình phương hai vế của phương trình (3) ta đưa tới phương trình hệ quả

$$(3) \Rightarrow (x-3)^2 = (2x+1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 10x - 8 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm là $x = -4$ và $x = \frac{2}{3}$.

Thử lại ta thấy phương trình (3) chỉ có nghiệm là $x = \frac{2}{3}$.

Kết luận. Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{2}{3}$.

2. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Để giải các phương trình chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai, ta thường bình phương hai vế để đưa về một phương trình hệ quả không chứa ẩn dưới dấu căn.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{2x-3} = x - 2. \qquad (4)$$

Giải. Điều kiện của phương trình (4) là $x \geq \frac{3}{2}$.

Bình phương hai vế của phương trình (4) ta đưa tới phương trình hệ quả

$$(4) \Rightarrow 2x - 3 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm là $x = 3 + \sqrt{2}$ và $x = 3 - \sqrt{2}$. Cả hai giá trị này đều thoả mãn điều kiện của phương trình (4) , nhưng khi thay vào phương trình (4) thì giá trị $x = 3 - \sqrt{2}$ bị loại (vế trái dương còn vế phải âm), còn giá trị $x = 3 + \sqrt{2}$ là nghiệm (hai vế cùng bằng $\sqrt{2} + 1$).

Kết luận. Vậy nghiệm của phương trình (4) là $x = 3 + \sqrt{2}$.

BÀI ĐỌC THÊM

PHƯƠNG TRÌNH BẬC n

Sách giáo khoa bậc THCS và THPT đã trình bày công thức giải phương trình bậc nhất và phương trình bậc hai. Công thức giải phương trình bậc ba mang tên nhà Toán học I-ta-li-a Các-đa-nô, tuy nhiên Các-đa-nô chỉ là người lần đầu tiên công bố công thức đó trong cuốn sách "Nghệ thuật vĩ đại hay các quy tắc của Đại số học" xuất bản năm 1545. Tác giả của công thức đó là nhà Toán học I-ta-li-a tên là Tác-ta-gli-a (Nicolo Tartaglia, 1500 – 1557).

G. CÁC-ĐA-NÔ (Girolamo Cardano, 1501 – 1576)

Công thức Các-đa-nô cho các nghiệm của phương trình bậc ba $x^3 + px + q = 0$ là

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Sau khi Tác-ta-gli-a tìm ra công thức này thì một học trò của Các-đa-nô là Phe-ra-ri (Ferrari, 1522 – 1565) đã tìm ra công thức giải phương trình bậc bốn, công thức này cũng đã được công bố trong cuốn sách của Các-đa-nô nêu trên.

N. A-BEN (Niels Henrik Abel, 1802 – 1829)

Sau đó nhiều nhà toán học đã cố gắng để tìm công thức giải phương trình bậc năm, nhưng phải đến Thế kỉ XIX hai nhà toán học trẻ tuổi là A-ben người Na-uy và Ga-loa người Pháp mới chứng minh được rằng không thể giải được bằng căn thức phương trình đại số tổng quát bậc cao hơn 4.

Trong quá trình tìm cách giải phương trình đại số tổng quát bậc 5 bằng căn thức, A-ben đã giải thích tại sao các phương trình bậc 2, 3, 4 có thể giải được bằng căn thức, còn Ga-loa tìm ra điều kiện cần và đủ để một phương trình có bậc đã cho (có thể lớn hơn 4) giải được bằng căn thức. Công lao to lớn của Ga-loa qua công trình này là đã đặt nền móng cho Đại số hiện đại nghiên cứu các cấu trúc đại số như nhóm, vành, trường,...

E. GA-LOA (Evariste Galois, 1811 – 1832)

Bài tập

1. Giải các phương trình

a) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{2x + 3} = \dfrac{2x - 5}{4}$; b) $\dfrac{2x + 3}{x - 3} - \dfrac{4}{x + 3} = \dfrac{24}{x^2 - 9} + 2$;

c) $\sqrt{3x - 5} = 3$; d) $\sqrt{2x + 5} = 2$.

2. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a) $m(x - 2) = 3x + 1$;

b) $m^2x + 6 = 4x + 3m$;

c) $(2m + 1)x - 2m = 3x - 2$.

3. Có hai rổ quýt chứa số quýt bằng nhau. Nếu lấy 30 quả ở rổ thứ nhất đưa sang rổ thứ hai thì số quả ở rổ thứ hai bằng $\dfrac{1}{3}$ của bình phương số quả còn lại ở rổ thứ nhất. Hỏi số quả quýt ở mỗi rổ lúc ban đầu là bao nhiêu ?

4. Giải các phương trình

a) $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$; b) $3x^4 + 2x^2 - 1 = 0$.

5. Giải các phương trình sau bằng máy tính bỏ túi (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba)

a) $2x^2 - 5x - 4 = 0$; b) $-3x^2 + 4x + 2 = 0$.

c) $3x^2 + 7x + 4 = 0$; d) $9x^2 - 6x - 4 = 0$.

Hướng dẫn cách giải câu a) : Nếu sử dụng máy tính CASIO *fx–500 MS*, ta ấn liên tiếp các phím

[MODE] [MODE] [1] [▶] [2] [2] [=] [(–)] [5] [=] [(–)] [4] [=]

màn hình hiện ra $x_1 = 3.137458609$.

Ấn tiếp

[=] màn hình hiện ra $x_2 = -0.637458608$.

Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba ta được nghiệm gần đúng của phương trình là $x_1 \approx 3{,}137$ và $x_2 \approx -0{,}637$.

6. Giải các phương trình

a) $|3x - 2| = 2x + 3$; b) $|2x - 1| = |-5x - 2|$;

c) $\dfrac{x-1}{2x-3} = \dfrac{-3x+1}{|x+1|}$;

d) $|2x+5| = x^2 + 5x + 1$.

7. Giải các phương trình

a) $\sqrt{5x+6} = x - 6$;

b) $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2} + 1$;

c) $\sqrt{2x^2+5} = x + 2$;

d) $\sqrt{4x^2+2x+10} = 3x + 1$.

8. Cho phương trình $3x^2 - 2(m+1)x + 3m - 5 = 0$.

Xác định m để phương trình có một nghiệm gấp ba nghiệm kia. Tính các nghiệm trong trường hợp đó.