B - LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

§1, §2. Mở đầu về phép biến hình. Phép tịnh tiến và phép dời hình

1. Giả sử phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Lấy hai điểm phân biệt M, N trên d và gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ thì M', N' nằm trên d'. Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$. Vậy hai đường thẳng d và d' có cùng vectơ chỉ phương nên $d \,//\, d'$ hoặc d trùng với d'.

d trùng với d' khi $\vec{u}$ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$, tức là khi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của d ; $d \,//\, d'$ khi $\vec{u}$ không phải là vectơ chỉ phương của d.

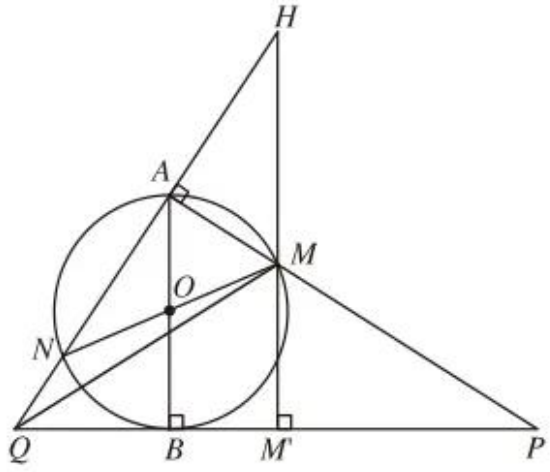
2. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO'}$, trong đó O là giao điểm của a và b ; O' là giao điểm của a' và b'.

3. (h.2)

Tam giác MPQ có QA là một đường cao (vì $QA \perp MP$). Bởi vậy nếu ta kẻ $MM' \perp PQ$ thì MM' cắt QA tại trực tâm H của tam giác MPQ, đoạn thẳng OA là đường trung bình của tam giác NMH nên

$$\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}.$$

Vậy phép tịnh tiến T theo vectơ $\overrightarrow{BA}$ biến M thành H. Chú ý rằng M không trùng với A hoặc B, ta suy ra quỹ tích H là ảnh của đường tròn (O) (không kể hai điểm A và B) qua phép tịnh tiến đó.

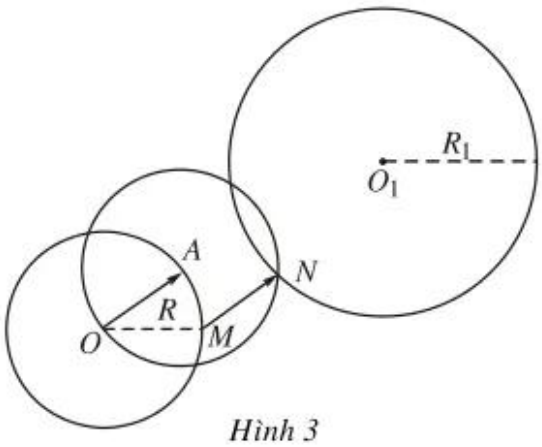


Hình 2

Làm tương tự đối với trực tâm H' của tam giác NPQ.

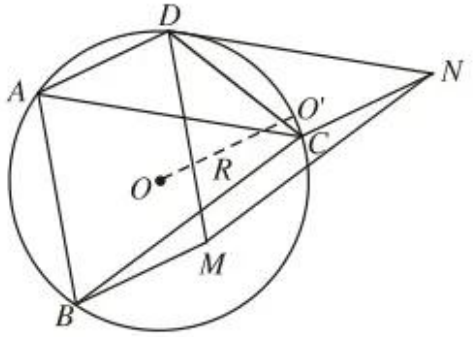
4. (h.3)

Giả sử đã xác định được M và N theo yêu cầu của bài toán. Khi đó, phép tịnh tiến T theo vectơ $\overrightarrow{OA}$ sẽ biến điểm M thành điểm N và biến đường tròn $(O\ ;\ R)$ thành đường tròn $(A\ ;\ R)$. Vì $(O\ ;\ R)$ đi qua M, nên $(A\ ;\ R)$ đi qua N. Do đó N là giao điểm của hai đường tròn $(A\ ;\ R)$ và $(O_1\ ;\ R_1)$. Từ đó, dễ dàng suy ra cách dựng.



Hình 3

Số nghiệm hình phụ thuộc vào số giao điểm của hai đường tròn $(A\ ;\ R)$ và $(O_1\ ;\ R_1)$.



Hình 4

5. (h.4)

Theo giả thiết, ta có

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CN}.$$

Vì vậy, phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AD}$ biến tam giác ABC thành tam giác DMN. Suy ra, nếu O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN thì phép tịnh tiến đó biến O thành O', tức là

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AD}.$$

Do đó

$$OO' = AD = R$$

và vì vậy O' nằm trên $(O\ ;\ R)$.

6. Với điểm M bất kì, giả sử $T(M) = M_1$ và $T'(M_1) = M'$. Khi đó $\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{v}$, suy ra $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} + \vec{v}$. Hợp thành của T và T' biến M thành M' nên hợp thành đó là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} + \vec{v}$.

Phép hợp thành đó là phép đồng nhất khi và chỉ khi

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}.$$

7. Biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến T là $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$

suy ra $x = x' - 1,\ \ y = y' + 2.$

a) i) Nếu $M(x\ ;\ y)$ nằm trên đường thẳng a thì $3x - 5y + 1 = 0$ hay $3(x' - 1) - 5(y' + 2) + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x' - 5y' - 12 = 0$. Điều đó chứng tỏ điểm $M'(x'; y')$ thoả mãn phương trình $3x - 5y - 12 = 0$. Đó là phương trình ảnh của đường thẳng a.

ii) Đường thẳng b có vectơ chỉ phương là $\vec{u}(1\ ;\ -2)$ nên phép tịnh tiến T biến b thành chính nó. Vậy ảnh của b cũng có phương trình $2x + y + 100 = 0$.

b) Nếu $M(x\ ;\ y)$ nằm trên đường tròn đã cho thì

$$x^2 + y^2 - 4x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x' - 1)^2 + (y' + 2)^2 - 4(x' - 1) + (y' + 2) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 6x' + 5y' + 10 = 0.$$

Như vậy điểm $M'(x' ; y')$ thoả mãn phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 5y + 10 = 0$. Đó là phương trình đường tròn ảnh của đường tròn đã cho.

8. Giả sử điểm $M(x ; y)$ nằm trên đường thẳng $d : Ax + By + C = 0$. Khi đó ảnh của M là điểm $M'(x' ; y')$ mà $x' = x + a$, $y' = y + b$ hay $x = x' - a$ $y = y' - b$. Suy ra $A(x' - a) + B(y' - b) + C = 0$, hay

$$Ax' + By' - aA - bB + C = 0. \qquad (1)$$

Để phép tịnh tiến T biến d thành d' ta phải có $Ax' + By' + C' = 0$. (2)

So sánh (1) và (2) ta suy ra $aA + bB + C' - C = 0$ (*).

Vậy các vectơ $\vec{u}(a ; b)$ cần tìm phải có toạ độ thoả mãn điều kiện (*).

9. Giả sử F là phép dời hình biến A thành A, biến B thành B, biến C thành C. Nếu F không phải là phép đồng nhất thì có ít nhất một điểm M sao cho $F(M) = M'$ và M' khác với M. Khi đó, vì F biến A thành A và biến M thành M' nên $AM = AM'$, tương tự ta cũng có $BM = BM'$, $CM = CM'$. Vậy ba điểm A, B, C nằm trên đường trung trực của MM', trái với giả thiết A, B, C không thẳng hàng. Vậy F phải là phép đồng nhất.

10. Vì mỗi phép dời hình đều không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì, nên hợp thành của chúng cũng có tính chất đó, bởi vậy nó cũng là phép dời hình.

11. Giả sử phép dời hình F biến hai đường thẳng song song a và b thành hai đường thẳng a' và b'. Ta lấy đường thẳng c nào đó vuông góc với a và b, cắt a và b lần lượt tại A và B. Khi đó F biến A thành A' nằm trên a', biến B thành B' nằm trên b'. Vì $a \perp AB$ và $b \perp AB$ nên $a' \perp A'B'$ và $b' \perp A'B'$. Vậy $a' // b'$ và vì $AB = A'B'$ nên khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách giữa a' và b'.

12. Giả sử có hai phép dời hình khác nhau F_1 và F_2 cùng biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Khi đó, có ít nhất một điểm M sao cho F_1 biến M thành M'_1 và F_2 biến M thành M'_2 khác M'_1. Khi đó ta có

$$AM = A'M'_1 \text{ và } AM = A'M'_2$$

nên $A'M'_1 = A'M'_2$ hay A' nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng $M'_1M'_2$.

Tương tự, điểm B' và C' cũng nằm trên đường trung trực đó. Suy ra ba điểm A', B', C' thẳng hàng, vô lí.

13. a) Phép dời hình F biến mỗi đường tròn $(O ; R)$ thành đường tròn $(O' ; R)$, trong đó điểm O' là ảnh của điểm O. Nếu hai đường tròn đó trùng nhau thì

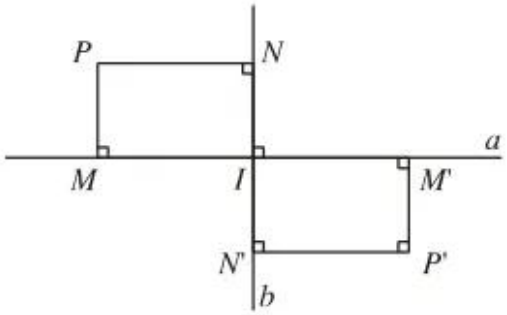
O phải trùng với O' và do đó trùng với I. Vậy các đường tròn được biến thành chính nó khi và chỉ khi chúng có tâm là I.

b) Giả sử a là đường thẳng không đi qua I. Ta kẻ $IH \perp a$, $H \in a$. Khi đó F biến H thành H', biến đường thẳng IH thành đường thẳng IH' và biến đường thẳng a thành đường thẳng a' đi qua H' và vuông góc với IH' tại H'. Chú ý rằng vì a không đi qua I nên H không trùng với H'. Từ đó, suy ra a' không trùng với a.

14. (h.5)

Lấy điểm M bất kì nằm trên a và khác I, phép dời hình F biến a thành a nên biến điểm M thành điểm M' trên a, $IM = IM'$. Ngoài ra vì M khác M' nên I là trung điểm của MM'.

Gọi b là đường thẳng đi qua I, vuông góc với a thì F biến b thành đường thẳng đi qua I và vuông góc với a. Do đó b biến thành b. Cũng lập luận như trên, nếu N nằm trên b thì F biến N thành N' sao cho I là trung điểm của NN'.



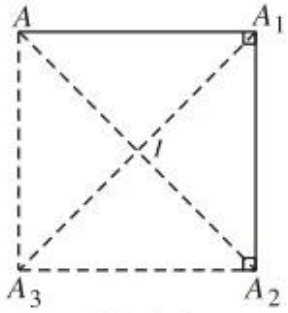
Hình 5

Bây giờ giả sử điểm P không nằm trên a và b. Kẻ $PM \perp a$ và $PN \perp b$ ($M \in a$, $N \in b$). Theo chứng minh trên M biến thành M', N biến thành N' sao cho I là trung điểm của MM' và NN'. Suy ra P biến thành điểm P' sao cho $M'IN'P'$ là hình chữ nhật và do đó I là trung điểm của PP'.

15. (h.6)

Trước hết, F không thể biến hai điểm phân biệt thành chính nó vì khi đó đường thẳng đi qua hai điểm đó phải biến thành chính nó, trái với giả thiết là F biến đường thẳng thành đường thẳng vuông góc.

Để chứng minh sự tồn tại của điểm biến thành chính nó, ta hãy lấy một điểm A nào đó và gọi $A_1 = F(A)$, $A_2 = F(A_1)$.



Hình 6

Nếu A trùng A_1 thì A là điểm biến thành chính nó, bởi vậy ta giả sử rằng A khác A_1. Khi đó A_2 khác A_1 và đường thẳng A_1A_2 vuông góc với đường thẳng AA_1. Đường thẳng ảnh của AA_2 là đường thẳng d qua A_1, vuông góc với AA_2. Đường thẳng ảnh của A_1A_2 là đường thẳng d' qua A_2, vuông góc

với A_1A_2. Vậy F biến A_2 thành giao điểm A_3 của d và d'. Vì F là phép dời hình nên $AA_1A_2A_3$ là hình vuông. Trung điểm I của AA_2 biến thành trung điểm của A_1A_3, tức là I biến thành chính nó qua F. Vậy F có duy nhất điểm I biến thành chính nó.

16. Nếu F là phép dời hình có tính chất đã cho thì dễ thấy F không có điểm biến thành chính nó, vì nếu I là điểm như thế thì đường thẳng a đi qua I biến thành đường thẳng a' cũng đi qua I nên a' không song song với a.

Ta lấy một điểm A bất kì, gọi $A' = F(A)$ và $A'' = F(A')$ thì đường thẳng a đi qua A và A' biến thành đường thẳng a' đi qua A' và A'', do đó a và a' cắt nhau tại A', vô lí. Vậy không có phép dời hình F có tính chất đã cho.

17. Ta lấy hai điểm bất kì $M = (x_0 ; y_0)$ và $N = (x_1 ; y_1)$. Khi đó F biến M, N lần lượt thành M', N' có toạ độ

$M' = (ax_0 + by_0 + p ; cx_0 + dy_0 + q)$ và $N' = (ax_1 + by_1 + p ; cx_1 + dy_1 + q)$.

Suy ra

$$\begin{aligned} M'N'^2 &= [a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)]^2 + [c(x_1 - x_0) + d(y_1 - y_0)]^2 \\ &= (a^2 + c^2)(x_1 - x_0)^2 + (b^2 + d^2)(y_1 - y_0)^2 + 2(ab + cd)(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) \\ &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \\ &= MN^2. \end{aligned}$$

Như vậy $M'N' = MN$.

Vậy F là phép dời hình.