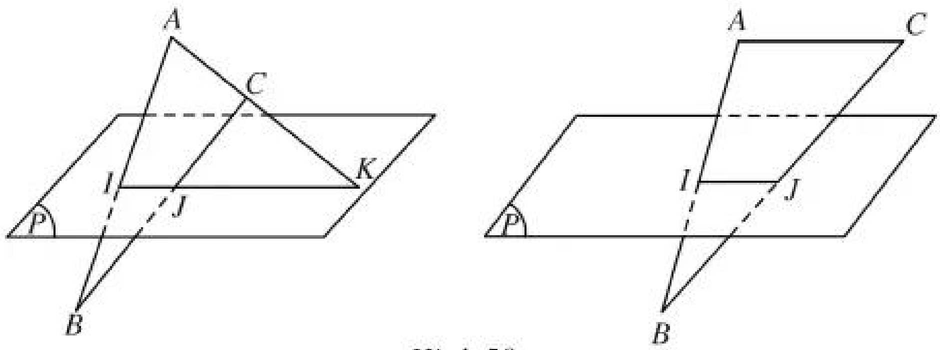
B - LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

§1. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng

1. Giả sử (P) là một mặt phẳng và a là một đường thẳng sao cho a không nằm trên (P). Nếu (P) và a có ít nhất hai điểm chung phân biệt thì theo định lí mặt phẳng (P) sẽ chứa a (trái với giả thiết).

2. Giả sử $I = AB \cap \text{mp}(P)$, $J = BC \cap \text{mp}(P)$.



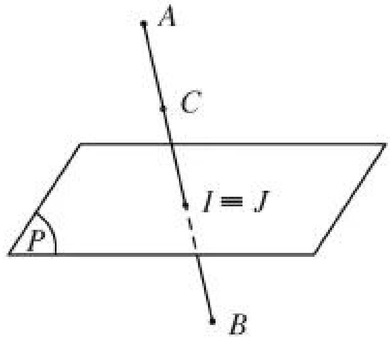
Hình 50

Trường hợp ba điểm A, B, C không thẳng hàng (h.50)

Xét mp(ABC) và đường thẳng IJ ta có $IJ \subset (ABC)$. Theo giả thiết A, B nằm khác phía đối với đường thẳng IJ và B, C cũng nằm khác phía đối với đường thẳng IJ. Vậy A, C nằm về một phía của đường thẳng IJ, nghĩa là đoạn thẳng AC không cắt mp(P).

Trường hợp ba điểm A, B, C thẳng hàng (h.51)

Khi đó, điểm J trùng với điểm I ; hai điểm A, C nằm về một phía đối với điểm J trên đường thẳng qua A, B, C, nghĩa là A và C nằm về một phía đối với mp(P). Vậy đoạn thẳng AC không cắt mặt phẳng (P).



Hình 51

3. Giả sử có ba điểm A, B, C của n điểm đã cho thẳng hàng. Khi đó bốn điểm A, B, C, D nào cũng đồng phẳng (mâu thuẫn với giả thiết). Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

4. Giả sử $A_1, A_2, ..., A_n$ là n điểm đã cho.

Nếu chúng thẳng hàng thì rõ ràng chúng đồng phẳng.

Nếu chúng không thẳng hàng thì tồn tại ba điểm không thẳng hàng (chẳng hạn A_1, A_2, A_3). Qua ba điểm đó ta có mp($A_1A_2A_3$). Khi đó vì bốn điểm nào của n điểm đã cho cũng đồng phẳng nên các điểm A_i, $i \geq 4$ đều nằm trong mp($A_1A_2A_3$).

5. Giả sử có mp(P) chứa bốn điểm M, N, I, J. Khi đó

$$M \in (P), N \in (P) \Rightarrow MN \subset (P) \Rightarrow A \in (P), B \in (P)$$

và $$I \in (P), J \in (P) \Rightarrow IJ \subset (P) \Rightarrow C \in (P), D \in (P)$$

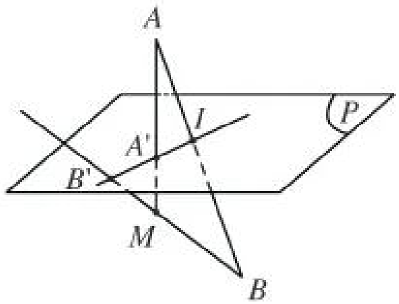
nên A, B, C, D đều thuộc (P) (trái giả thiết). Suy ra điều phải chứng minh.

6. (h.52)

Vì A và B nằm về hai phía đối với mp(P) nên đường thẳng AB cắt (P) tại một điểm I. Khi đó I cố định.

Nếu M nằm trên đường thẳng AB thì $A' \equiv B' \equiv I$.

Nếu M không nằm trên đường thẳng AB thì có mp(MAB). Khi đó



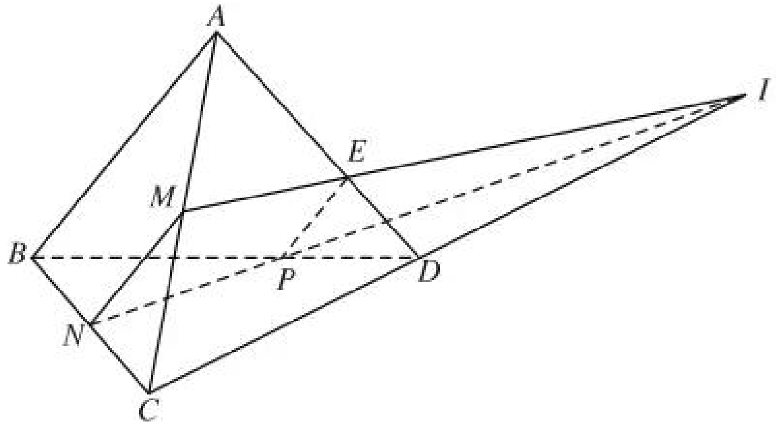
Hình 52

$$\left.\begin{array}{l} A' \in AM,\ AM \subset \text{mp}(MAB) \Rightarrow A' \in \text{mp}(MAB) \\ B' \in BM,\ BM \subset \text{mp}(MAB) \Rightarrow B' \in \text{mp}(MAB) \\ I \in AB,\ AB \subset \text{mp}(MAB) \Rightarrow I \in \text{mp}(MAB). \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Mặt khác, các điểm A', B', I đều thuộc mp(P). (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A', B', I thẳng hàng, tức là đường thẳng $A'B'$ đi qua điểm cố định I.

7. (h.53)



Hình 53

a) Xét mp(BCD), ta có $\frac{BN}{BC} \neq \frac{BP}{BD}$. Suy ra đường thẳng NP cắt đường thẳng CD tại một điểm I. Điểm I thuộc CD và cũng thuộc mp(MNP) nên I chính là giao điểm của CD và mp(MNP).

b) Gọi E là giao điểm của đường thẳng MI và AD. Khi đó, rõ ràng E và P là hai điểm chung của hai mặt phẳng (MNP) và (ABD).

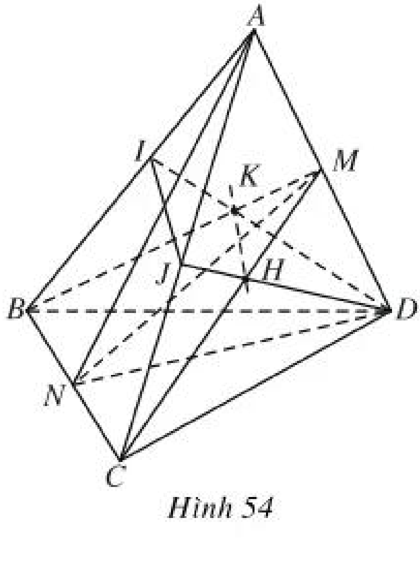
Vậy $(MNP) \cap (ABD) = EP$.

8. (h.54)

a) Ta có $(MBC) \cap (NAD) = MN$.

b) Gọi K là giao điểm của MB với ID và H là giao điểm của MC với DJ thì rõ ràng K và H là hai điểm chung của hai mặt phẳng (MBC) và (IJD) nên

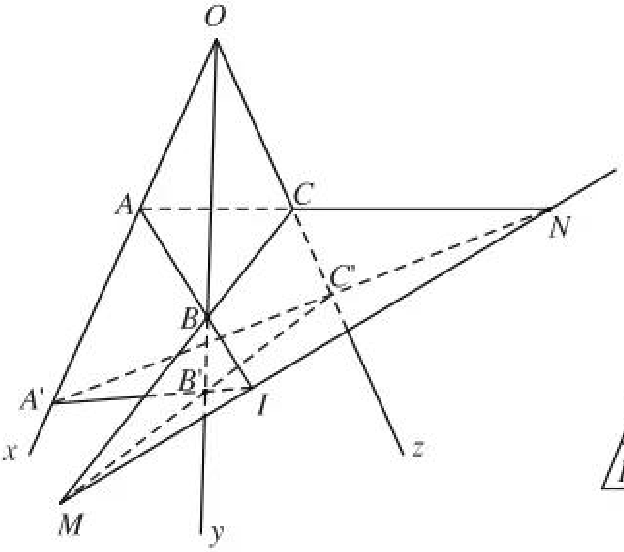
$$(MBC) \cap (IJD) = KH.$$



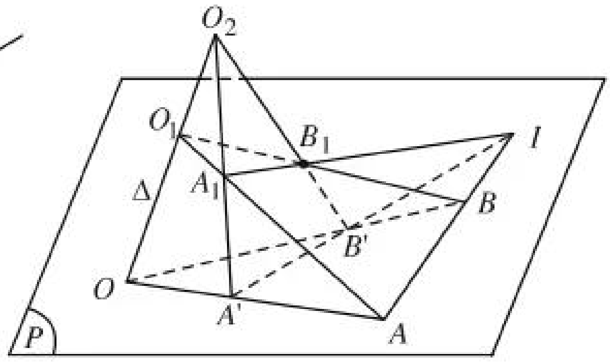
Hình 54

9. *Trường hợp Ox, Oy, Oz không đồng phẳng* (h.55)

Dễ thấy M, N, I là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (ABC) và $(A'B'C')$ nên chúng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng đó. Vậy ba điểm M, N, I thẳng hàng.



Hình 55



Hình 56

Trường hợp Ox, Oy, Oz thuộc một mp(P) (h.56)

Qua O ta dựng một đường thẳng Δ không nằm trên mp(P). Trên Δ lấy các điểm O_1, O_2. Gọi A_1 là giao điểm của O_1A với O_2A', B_1 là giao điểm của O_1B với O_2B'. Dễ chứng minh A_1B_1, $A'B'$, AB đồng quy tại I. Tương tự, ta dựng điểm C_1 là giao điểm của O_1C với O_2C'. Hai tam giác $A_1B_1C_1$ và ABC không nằm trong một mặt phẳng, nên theo câu a) ta được ba điểm M, N, I thẳng hàng.

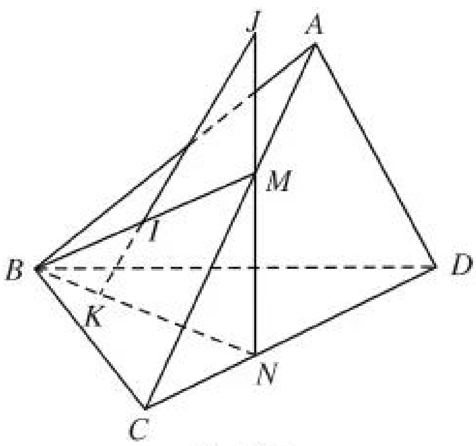
10. (h.57)

Ta chọn một mặt phẳng chứa IK và tìm giao tuyến của mặt phẳng này với mp(ACD) thì giao điểm của giao tuyến đó với IK chính là điểm J cần tìm.

Xét mp(BIK), gọi M, N lần lượt là các giao điểm của các cặp đường thẳng BI với CA và BK với CD. Khi đó

$$(BIK) \cap (ACD) = MN.$$

Từ đó J chính là giao điểm của đường thẳng MN với đường thẳng KI.



Hình 57

11. (h.58)

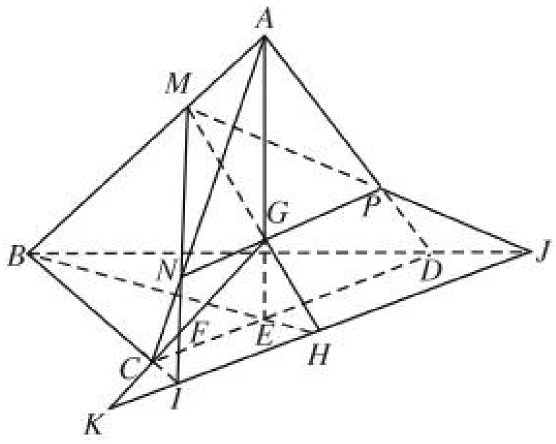
a) Ta có

$JN \subset \text{mp}(MNP)$,

$IP \subset \text{mp}(MNP)$.

Vì $\dfrac{CN}{NA} = \dfrac{EG}{GA} = \dfrac{DP}{PA} = \dfrac{1}{2}$

nên trong mp(ACD) các điểm N, G, P nằm trên một đường thẳng song song với CD. Từ đó G thuộc NP, suy ra $MG \subset \text{mp}(MNP)$. Vậy ba đường thẳng MG, JN, IP đều thuộc mp(MNP).



Hình 58

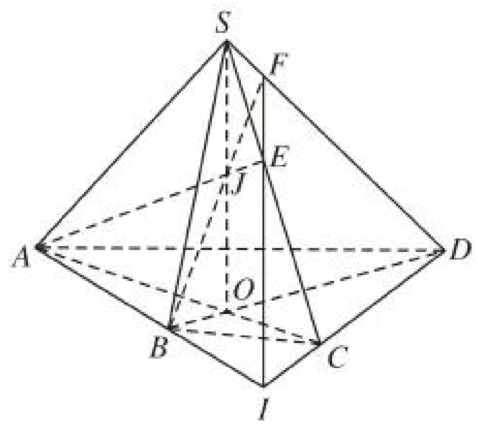
b) Vì H là giao điểm của MG với BE nên H thuộc mp(MNP) và mp(BCD). Vì K là giao điểm của GF với mp(BCD) nên K thuộc mp(BCD) và mp(MNP). Mặt khác mp(MNP) và mp(BCD) cắt nhau theo giao tuyến IJ. Vậy các điểm H và K phải thuộc đường thẳng IJ, tức là bốn điểm I, J, H, K thẳng hàng.

12. (h.59)

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD ; J là giao điểm của SO và AE. Hai mặt phẳng (SBD) và (ABE) có hai điểm chung là B và J. Do đó (SBD) $\cap$ (ABE) = BJ.

Gọi F là giao điểm của BJ và SD thì F chính là giao điểm của đường thẳng SD với mp(ABE).

b) Gọi I là giao điểm của AB và CD. Khi đó ba điểm I, E, F cùng thuộc hai mặt phẳng (ABE) và (SCD) nên chúng thẳng hàng.

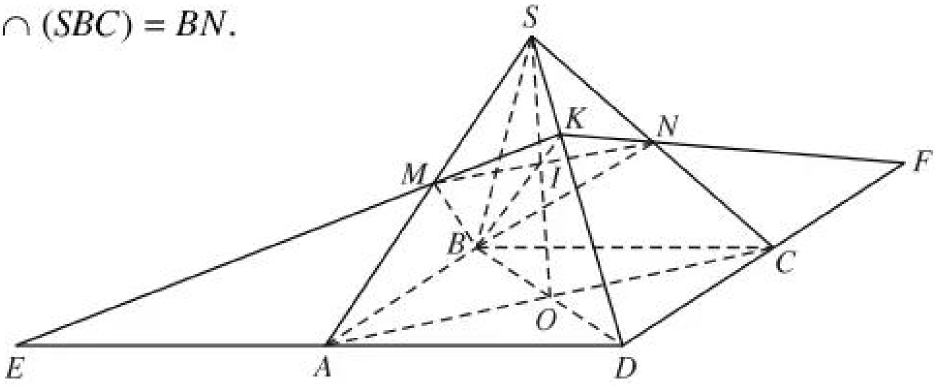


Hình 59

13. (h.60)

a) $(P) \cap (SAB) = BM$,

$(P) \cap (SBC) = BN$.



Hình 60

b) Xét mp(SAC), gọi I là giao điểm của SO và MN thì I là giao điểm của SO và mp(P). Gọi K là giao điểm của đường thẳng BI với SD thì K là giao điểm của SD và (P).

c) $(P) \cap (SAD) = MK$,

$(P) \cap (SDC) = KN$.

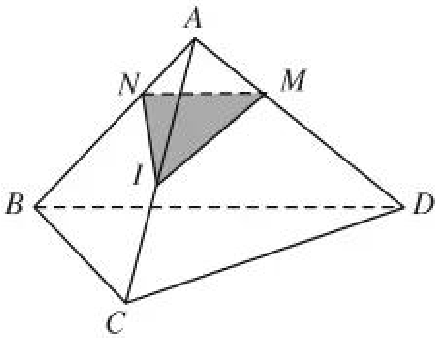
d) Trong mp(SAD) gọi E là giao điểm của đường thẳng MK với đường thẳng AD thì E là giao điểm của (P) và AD.

Tương tự giao điểm F của KN và DC là giao điểm của (P) và DC.

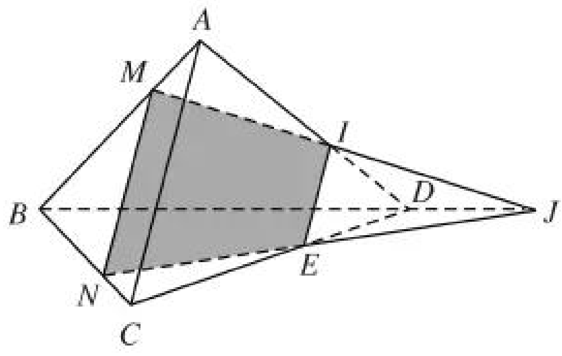
Rõ ràng B, E, F là ba điểm chung của hai mặt phẳng (P) và mp($ABCD$) nên chúng phải thẳng hàng.

14. a) (h.61)

Thiết diện là tam giác MNI.



Hình 61



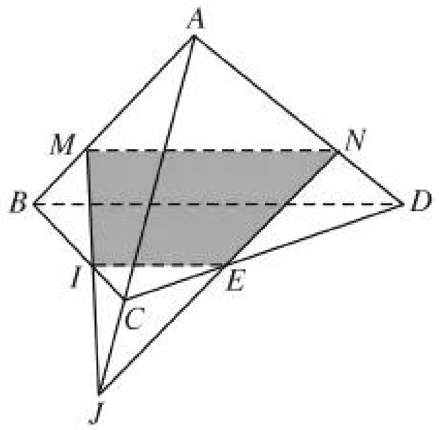
Hình 62

b) (h.62)

Kéo dài MI cắt BD tại J. Nối J với N cắt CD tại E. Thiết diện là tứ giác $MIEN$.

c) (h.63)

Kéo dài MI cắt AC tại J. Nối J và N cắt CD tại E. Thiết diện là tứ giác $MIEN$.



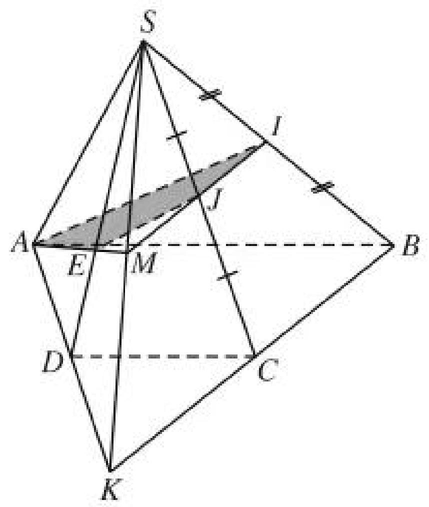
Hình 63

15. a) (h.64)

Gọi K là giao điểm của AD và BC ; khi đó hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có hai điểm chung S và K. Vậy giao tuyến của chúng là đường thẳng SK.

b) Gọi M là giao điểm của IJ và SK. Khi đó $(SAD) \cap (AIJ) = AM$. Gọi E là giao điểm của AM và SD thì E chính là giao điểm của SD với mp(AIJ).

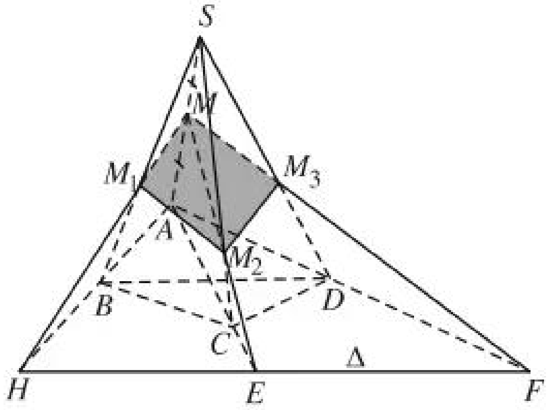
c) Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(AIJ) là tứ giác $AIJE$.



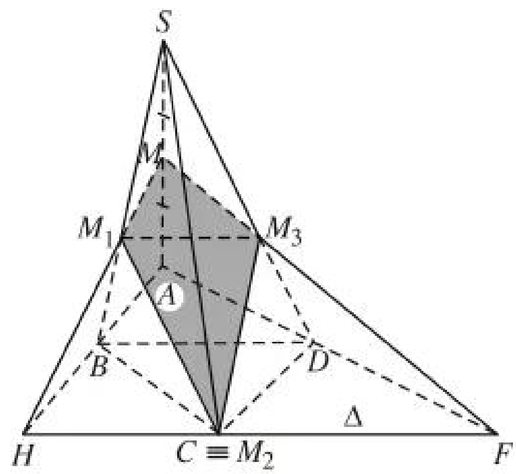
Hình 64

16. a) (h.65)

Gọi H, E, F lần lượt là các giao điểm của Δ với các đường thẳng AB, AC và AD. Khi đó các cạnh bên SB, SC, SD của hình chóp lần lượt cắt các đường thẳng MH, ME và MF tại M_1, M_2, M_3. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(M, Δ) trong trường hợp này là tứ giác $MM_1M_2M_3$.



Hình 65



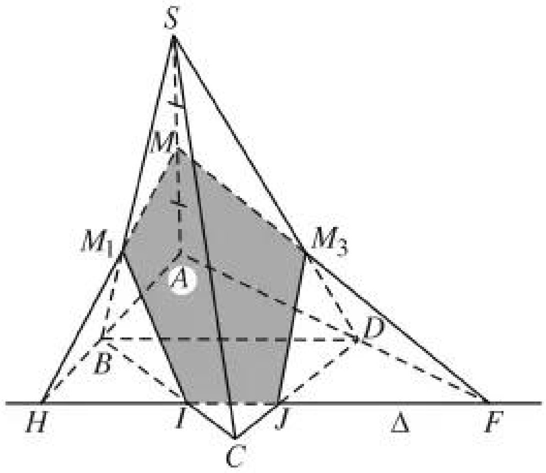
Hình 66

b) (h.66)

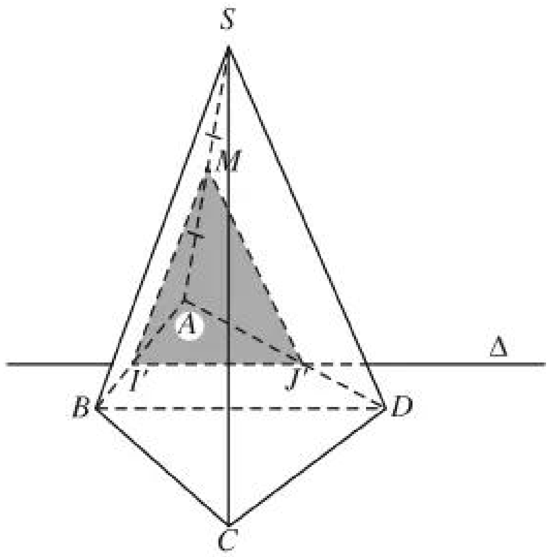
Thiết diện là tứ giác MM_1CM_3.

c) (h.67)

Thiết diện là ngũ giác MM_1IJM_3.



Hình 67



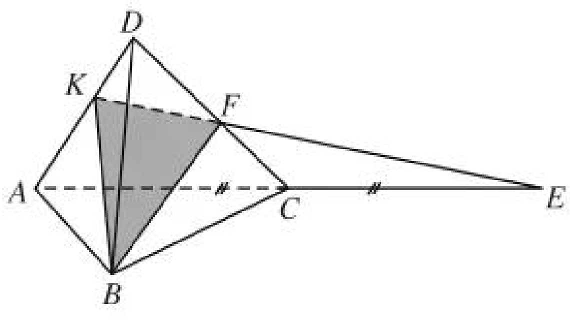
Hình 68

d) (h.68)

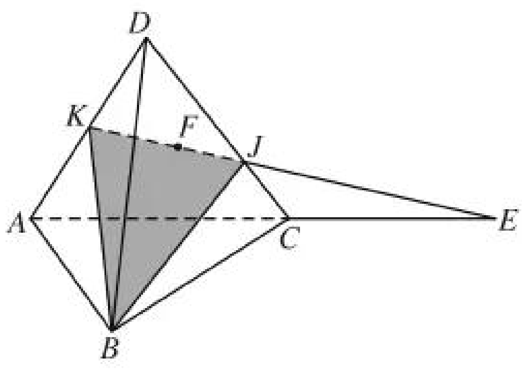
Thiết diện là tam giác $MI'J'$.

17. a) (h.69)

Trong mp(ACD), kéo dài EF cắt AD tại K. Khi đó thiết diện cần tìm là tam giác BFK.



Hình 69



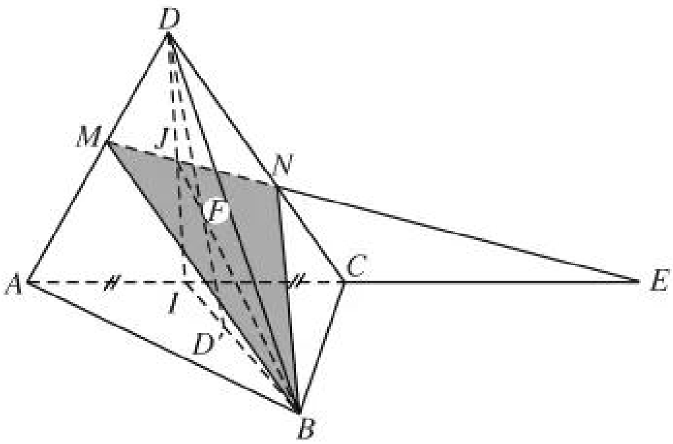
Hình 70

b) (h.70)

Trong mp(ACD), kéo dài EF cắt AD và DC lần lượt tại K và J. Khi đó thiết diện cần tìm là tam giác BKJ.

c) (h.71)

Gọi I là giao điểm của BD' và AC (I là trung điểm của AC). Xét mp(BDI) ta có đường thẳng BF cắt DI tại một điểm J. Khi đó J là điểm chung của hai mặt phẳng (BEF) và (DAC). Vậy (BEF) cắt (DAC) theo đường thẳng EJ. Đường thẳng này cắt AD và DC tại M và N. Vậy thiết diện cần tìm là tam giác BMN.

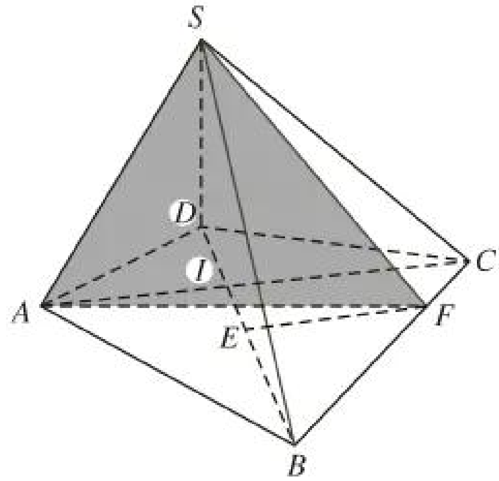


Hình 71

18. (h.72)

Gọi E là trung điểm của BD. Trong mp($ABCD$), từ E kẻ đường thẳng EF song song với AC. Đường thẳng này cắt một trong hai cạnh CB hoặc CD. Chẳng hạn cắt cạnh BC tại F. Tam giác SAF chính là thiết diện cần tìm.

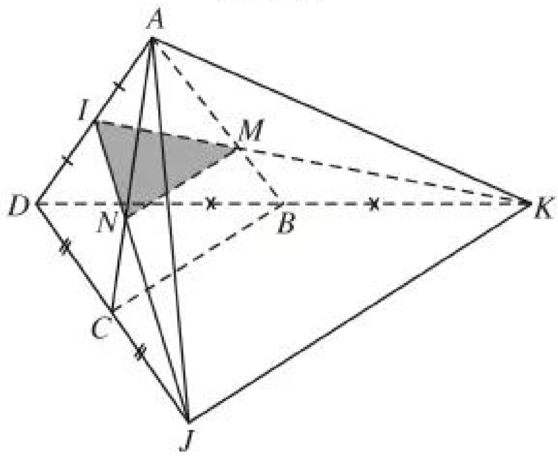
Trong trường hợp E trùng với giao điểm I của AC và BD thì EF trùng với IC. Dễ chứng minh rằng đường thẳng AF chia tứ giác $ABCD$ thành hai phần có diện tích bằng nhau.



Hình 72

19. (h.73)

a) Nối I và J cắt AC tại N. Nối I và K cắt AB tại M. Tam giác IMN là thiết diện cần tìm.



Hình 73

b) Dễ thấy M là trọng tâm tam giác ADK, N là trọng tâm tam giác ADJ. Từ đó, ta có

$$AN = \frac{2}{3}AC,\ AM = \frac{2}{3}AB.$$

Suy ra $AN = AM = \frac{2}{3}a$ và $MN \,//\, CB$. Do đó $MN = \frac{2}{3}CB$ hay $MN = \frac{2}{3}a$.

Xét tam giác AIM. Ta có

$$IM^2 = AI^2 + AM^2 - 2AI.AM.\cos 60^{\circ}$$
$$= \frac{a^2}{4} + \frac{4}{9}a^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2a}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{36}a^2$$
$$\Rightarrow IM = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

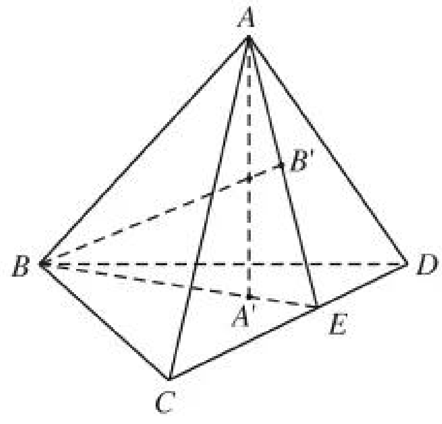
Tương tự, ta có $IN = \frac{a\sqrt{13}}{6}$.

Vậy theo công thức Hê-rông, ta có

$$S_{IMN} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{13}}{6}+\frac{2}{6}a\right)\cdot\frac{2}{6}a\cdot\frac{2}{6}a\cdot\left(\frac{a\sqrt{13}}{6}-\frac{2}{6}a\right)} = \frac{a^2}{6}.$$

20. (h.74)

Vì bốn đỉnh của tứ diện không đồng phẳng nên bốn đường thẳng (lần lượt đi qua mỗi đỉnh của tứ diện và tâm đường tròn nội tiếp của mặt đối diện) cũng không đồng phẳng. Để chứng minh bốn đường thẳng đó đồng quy ta chỉ cần chứng minh chúng đôi một cắt nhau.



Hình 74

Gọi A', B' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác BCD và tam giác ACD. Gọi E là giao điểm của BA' với CD. Theo tính chất đường phân giác, ta có

$$\frac{EC}{ED} = \frac{BC}{BD}.$$

Từ giả thiết $AC.BD = AD.BC \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AD}$.

Suy ra AE là đường phân giác của góc CAD, do đó tâm B' của đường tròn nội tiếp tam giác ACD phải thuộc AE. Hai đường thẳng AA' và BB' nằm trong mp(ABE), dễ thấy chúng không song song nên chúng cắt nhau.

Chứng minh tương tự, hai đường thẳng bất kì trong bốn đường thẳng nói trên cắt nhau. Vậy bốn đường thẳng đó không đồng phẳng và đôi một cắt nhau, nên chúng đồng quy.

21. (h.75)

a) Gọi K là giao điểm của MN và BC thì K cố định và K là một điểm chung của mp(P) với mp(BCD). Mặt khác

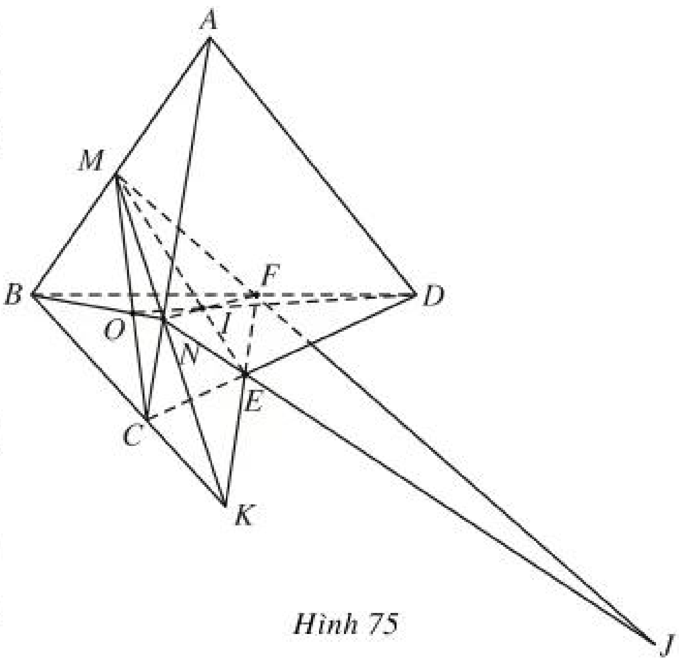
mp(P) $\cap$ mp(BCD) = EF.

Vậy K phải thuộc EF, nên EF luôn qua điểm cố định K.

b) Ta có I là giao điểm của ME và NF. Vậy

$I \in ME, ME \subset (MCD) \Rightarrow I \in (MCD)$

và $I \in NF$, $NF \subset (NBD) \Rightarrow I \in (NBD)$.



Hình 75

Từ đó, suy ra I thuộc giao tuyến OD của (MCD) và (NBD).

Khi E chạy đến C thì F chạy đến B và I chạy đến O.

Khi E chạy đến D thì F chạy đến D và I cũng chạy đến D.

Vậy tập hợp các điểm I là đoạn thẳng OD.

Học sinh tự chứng minh phần đảo.

c) J là giao điểm của MF và NE. Từ đó dễ thấy J thuộc cả hai mặt phẳng (ABD) và (ACD). Vậy J phải thuộc giao tuyến AD của hai mặt phẳng (ABD) và (ACD).

Lí luận tương tự như câu a) ta thấy tập hợp các điểm J là đường thẳng AD trừ các điểm trong của đoạn AD.