

## **ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG**

---

### **A - KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI**

#### **§1. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng**

##### **I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN**

###### *1. Các tính chất thừa nhận*

- a) *Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.*
- b) *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.*
- c) *Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.*
- d) *Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.*
- e) *Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.*

###### *2. Định lí*

*Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trên mặt phẳng đó.*

###### *3. Các điều kiện xác định mặt phẳng*

*Một mặt phẳng được xác định nếu biết một trong ba điều kiện sau đây :*

- a) *Đi qua ba điểm không thẳng hàng ;*
- b) *Đi qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó ;*
- c) *Đi qua hai đường thẳng cắt nhau.*

*4. Hình chóp có đáy là một đa giác và các mặt bên đều là tam giác có chung một đỉnh (đỉnh của hình chóp).*

*5. Hình tứ diện ABCD là hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD, BCD, trong đó A, B, C, D là bốn điểm không đồng phẳng.*

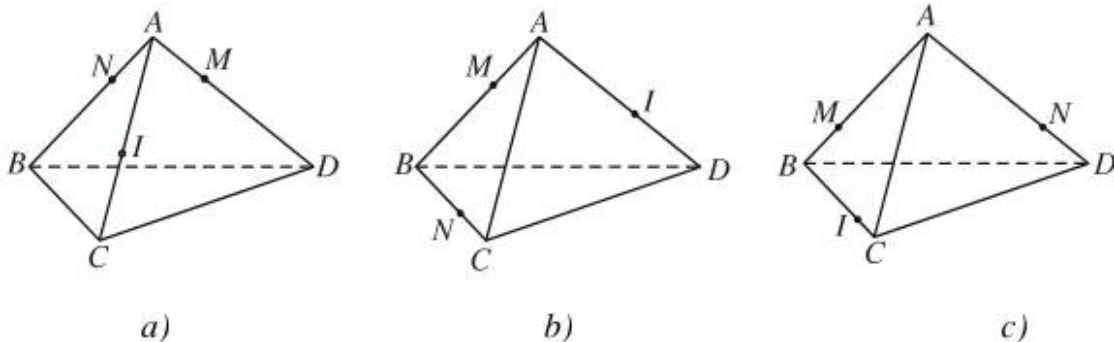
## II - ĐỀ BÀI

1. Chứng minh rằng : Một mặt phẳng và một đường thẳng không nằm trên mặt phẳng đó có không quá một điểm chung.
2. Cho mặt phẳng  $(P)$  và ba điểm  $A, B, C$  nằm ngoài  $mp(P)$ . Giả sử đoạn thẳng  $AB$  và đoạn thẳng  $BC$  đều cắt  $mp(P)$ . Chứng minh rằng đoạn thẳng  $AC$  không cắt  $mp(P)$ .
3. Cho  $n$  điểm ( $n \geq 4$ ) trong đó không có bốn điểm nào đồng phẳng. Chứng minh rằng không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng.
4. Cho  $n$  điểm ( $n \geq 4$ ) trong đó bất kì bốn điểm nào cũng đồng phẳng. Chứng tỏ rằng  $n$  điểm đó đồng phẳng.
5. Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  không đồng phẳng. Hai điểm phân biệt  $M, N$  nằm trên đoạn thẳng  $AB$  và hai điểm phân biệt  $I, J$  nằm trên đoạn thẳng  $CD$ . Chứng minh rằng bốn điểm  $M, N, I, J$  không đồng phẳng.
6. Cho hai điểm cố định  $A, B$  nằm về hai phía của  $mp(P)$  cố định. Gọi  $M$  là một điểm chuyển động bất kì trong không gian. Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng  $MA, MB$  lần lượt cắt  $mp(P)$  tại hai điểm  $A', B'$  phân biệt thì đường thẳng  $A'B'$  đi qua một điểm cố định.
7. Cho bốn điểm không đồng phẳng  $A, B, C, D$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BC$ . Trên đoạn  $BD$  lấy điểm  $P$  sao cho  $BP = 2PD$ .
  - a) Tìm giao điểm của đường thẳng  $CD$  với  $mp(MNP)$ .
  - b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MNP)$  và  $(ABD)$ .
8. Cho bốn điểm không đồng phẳng  $A, B, C, D$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ .
  - a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MBC)$  và  $(NDA)$ .
  - b) Cho  $I, J$  là hai điểm lần lượt nằm trên hai đoạn thẳng  $AB$  và  $AC$ . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MBC)$  và  $(IJD)$ .
9. Cho ba tia  $Ox, Oy, Oz$ . Trên các tia  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt lấy các cặp điểm  $A$  và  $A', B$  và  $B', C$  và  $C'$  sao cho  $BC$  cắt  $B'C'$  tại  $M, CA$  cắt  $C'A'$  tại  $N$  và  $AB$  cắt  $A'B'$  tại  $I$ . Chứng minh ba điểm  $M, N, I$  thẳng hàng.
10. Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  không đồng phẳng. Gọi  $I, K$  theo thứ tự là hai điểm trong của các tam giác  $ABC$  và  $BCD$ . Giả sử đường thẳng  $IK$  cắt mặt phẳng  $(ACD)$  tại  $J$ . Hãy xác định giao điểm  $J$  đó.
11. Cho bốn điểm không đồng phẳng  $A, B, C, D$ ;  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ACD$ . Các điểm  $M, N, P$  lần lượt thuộc các đoạn thẳng  $AB, AC, AD$  sao cho

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NA} = \frac{PD}{PA} = \frac{1}{2}.$$

Gọi  $I, J$  lần lượt là các giao điểm của đường thẳng  $MN$  với  $BC$  và  $MP$  với  $BD$ .

- a) Chứng minh rằng các đường thẳng  $MG, PI, NJ$  đồng phẳng.
  - b) Gọi  $E, F$  lần lượt là các trung điểm của  $CD, NI$ ;  $H$  là giao điểm của  $MG$  với  $BE$ ;  $K$  là giao điểm của  $GF$  với mp( $BCD$ ). Chứng minh rằng các điểm  $H, K, I, J$  thẳng hàng.
- 12.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Trên cạnh  $SC$  lấy một điểm  $E$  không trùng với hai điểm  $S$  và  $C$ .
- a) Tìm giao điểm  $F$  của đường thẳng  $SD$  với mp( $ABE$ ).
  - b) Giả sử  $AB$  không song song với  $CD$ , hãy chứng minh ba đường thẳng  $AB, CD$  và  $EF$  đồng quy.
- 13.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là một hình bình hành,  $O$  là tâm của đáy;  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SC$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $M, N$  và  $B$ .
- a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  với các mặt phẳng  $(SAB), (SBC)$ .
  - b) Tìm giao điểm  $I$  của đường thẳng  $SO$  với mp( $P$ ) và giao điểm  $K$  của đường thẳng  $SD$  với mp( $P$ ).
  - c) Xác định giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  với mặt phẳng  $(SAD)$  và mặt phẳng  $(SDC)$ .
  - d) Xác định các giao điểm  $E, F$  của các đường thẳng  $DA, DC$  với mặt phẳng  $(P)$  và chứng tỏ rằng ba điểm  $E, B, F$  thẳng hàng.
- 14.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Hãy xác định thiết diện của hình tứ diện  $ABCD$  khi cắt bởi mặt phẳng  $(MNI)$  trong các trường hợp dưới đây (h.49) :



Hình 49

- 15.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang ( $AB \parallel CD, AB > CD$ ). Gọi  $I, J$  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh  $SB$  và  $SC$ .

- a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng ( $SAD$ ) và ( $SBC$ ).
- b) Tìm giao điểm của đường thẳng  $SD$  với  $mp(AIJ)$ .
- c) Xác định thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  cắt bởi  $mp(AIJ)$ .
- 16.** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  ;  $\Delta$  là một đường thẳng nằm trong  $mp(ABCD)$  sao cho  $\Delta$  song song với  $BD$ ,  $M$  là trung điểm cạnh  $SA$ . Hãy xác định thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  khi cắt bởi  $mp(M, \Delta)$  trong các trường hợp sau đây :
- a)  $\Delta$  không cắt cạnh nào của đáy  $ABCD$ .
- b)  $\Delta$  đi qua điểm  $C$ .
- c)  $\Delta$  cắt hai cạnh  $BC$  và  $CD$  tại hai điểm  $I$  và  $J$ .
- d)  $\Delta$  cắt hai cạnh  $AB$  và  $AD$  tại hai điểm  $I'$  và  $J'$ .
- 17.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng của  $A$  qua điểm  $C$ . Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng đi qua  $B, E$  và một điểm  $F$  trong các trường hợp sau đây :
- a)  $F$  nằm trên đoạn  $CD$  và không trùng với  $C$  và  $D$ .
- b)  $F$  nằm trong tam giác  $ACD$ .
- c)  $F$  nằm trong đoạn thẳng  $DD'$  ( $D'$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ ).
- 18.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là tứ giác lồi. Mặt phẳng ( $P$ ) đi qua  $SA$  và chia đáy hình chóp thành hai phần có diện tích bằng nhau. Hãy xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi  $mp(P)$ .
- 19.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AD$ ,  $J$  là điểm đối xứng với  $D$  qua  $C$ ,  $K$  là điểm đối xứng với  $D$  qua  $B$ .
- a) Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi  $mp(IJK)$ .
- b) Tính diện tích thiết diện được xác định ở câu a).
- 20.** Cho tứ diện  $ABCD$  thoả mãn điều kiện  $AB.CD = AC.BD = AD.BC$ . Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua mỗi đỉnh và tâm đường tròn nội tiếp của mặt đối diện đồng quy tại một điểm.
- 21.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Hai điểm  $M, N$  lần lượt nằm trên hai cạnh  $AB$  và  $AC$  sao cho  $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ . Một mặt phẳng ( $P$ ) thay đổi luôn chứa  $MN$ , cắt các cạnh  $CD$  và  $BD$  lần lượt tại  $E$  và  $F$ .
- a) Chứng minh rằng đường thẳng  $EF$  luôn đi qua một điểm cố định.

- b) Tìm tập hợp giao điểm  $I$  của  $ME$  và  $NF$ .
- c) Tìm tập hợp giao điểm  $J$  của  $MF$  và  $NE$ .