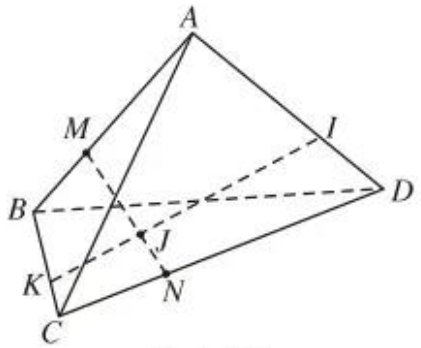
B - LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

§1. Vectơ trong không gian. Sự đồng phẳng của các vectơ

1. (h.133). *Cách 1.*

Ta có $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MJ}$ (1)

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NJ}$. (2)



Hình 133

Từ (2) ta có

$k\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{ID} + k\overrightarrow{DN} + k\overrightarrow{NJ}$

hay $k\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MJ}$. (3)

Từ (1), (3) ta có

$(1-k)\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{DN}$

hay $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{AM} - \dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{DN}$.

Chứng minh tương tự như trên, ta có

$$\overrightarrow{JK} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{MB} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{NC}.$$

Mặt khác $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$

nên $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{2}{1-k}\overrightarrow{MB} - \dfrac{2k}{1-k}\overrightarrow{NC}$.

Từ đó, ta có $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{JK}$.

Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Cách 2.

Vì $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$

nên với điểm O bất kì thì $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3}$.

Tương tự $\overrightarrow{ON} = \dfrac{\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OC}}{3}$; $\overrightarrow{OI} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OD}}{1-k}$; $\overrightarrow{OK} = \dfrac{\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OC}}{1-k}$

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OM} - k\overrightarrow{ON}}{1-k}.$$

Từ đó, ta có $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OD} - 2k\overrightarrow{OC})$

$$= \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{3}[(1-k)\overrightarrow{OI} + 2(1-k)\overrightarrow{OK}]$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OK}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK}.$$

Mặt khác $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

2. (h.134)

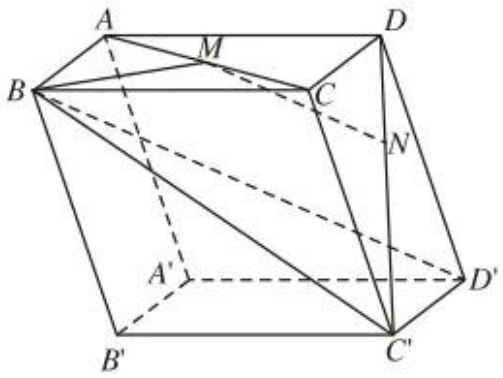
Xác định m :

Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ thì

$$\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Do $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}$ nên

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BC} - m\overrightarrow{BA}}{1-m} = \frac{\vec{c} - m\vec{a}}{1-m}.$$



Hình 134

Tương tự, ta có

$$\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BD} - m\overrightarrow{BC'}}{1-m} = \frac{\vec{a} + \vec{c} - m(\vec{b} + \vec{c})}{1-m}$$

$$= \frac{1}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} + \vec{c}.$$

Từ đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$

$$= \frac{1+m}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} - \frac{m}{1-m}\vec{c}.$$

Do AC, BD' chéo nhau và DC', BD' chéo nhau nên

$$MN \,//\, BD' \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}.$$

Mặt khác $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên điều ấy xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{1+m}{1-m} = k \\ -\dfrac{m}{1-m} = k \\ -\dfrac{m}{1-m} = k. \end{cases}$$

Suy ra $\quad 1 + m = -m \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}\cdot$

Từ đó, ta có $k = \dfrac{1}{3}\cdot$

Vậy $m = -\dfrac{1}{2}$ thì $MN \,//\, BD'$.

Tính MN :

Khi ấy $\qquad \overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

do đó $\qquad \overrightarrow{MN}^2 = \dfrac{1}{9}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + 2\vec{a}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c})$

hay $\qquad MN^2 = \dfrac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)$

tức là $\qquad MN = \dfrac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}$.

3. (h.135)

Đặt $\quad \overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}.$

Ta có

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'})$$

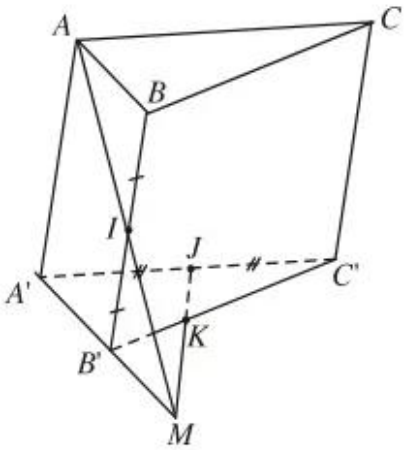
$$= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b}) \ ; \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a} + \vec{c})$$

$$= \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{c}). \qquad (2)$$



Hình 135

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\overrightarrow{AC'} + 2\overrightarrow{AB'}}{3}$$

$$= \frac{\vec{a} + \vec{c} + 2(\vec{a} + \vec{b})}{3}$$

$$= \frac{3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}}{3}. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ})$.

Vậy $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}$ đồng phẳng, tức là các điểm A, I, J, K cùng thuộc một mặt phẳng.

Chú ý. Có thể chứng minh các điểm A, I, J, K thuộc một mặt phẳng bằng cách chứng minh AI và JK cắt nhau tại M (xem hình 135).

4. (h.136)

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên

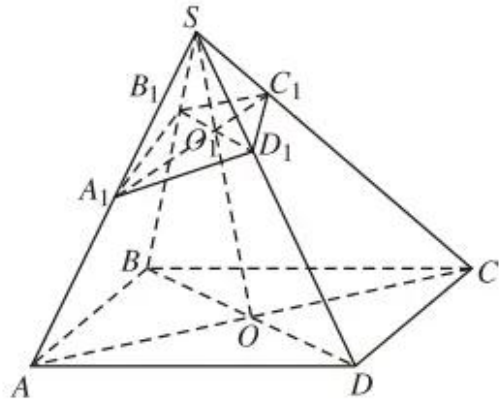
$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$$

hay $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}$.

Đặt $\overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA_1}$, $\overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB_1}$,

$\overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC_1}$, $\overrightarrow{SD} = d\overrightarrow{SD_1}$

(với a, b, c, d là các số lớn hơn 1).



Hình 136

Khi đó
$$\frac{SA}{SA_1} + \frac{SC}{SC_1} = a + c$$

$$\frac{SB}{SB_1} + \frac{SD}{SD_1} = b + d$$

và
$$\overrightarrow{SD_1} = \frac{1}{d} \cdot \overrightarrow{SD} = \frac{1}{d}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB})$$

$$= \frac{1}{d}(a\overrightarrow{SA_1} + c\overrightarrow{SC_1} - b\overrightarrow{SB_1})$$

$$= \frac{a}{d} \cdot \overrightarrow{SA_1} + \frac{c}{d} \cdot \overrightarrow{SC_1} - \frac{b}{d} \cdot \overrightarrow{SB_1}.$$

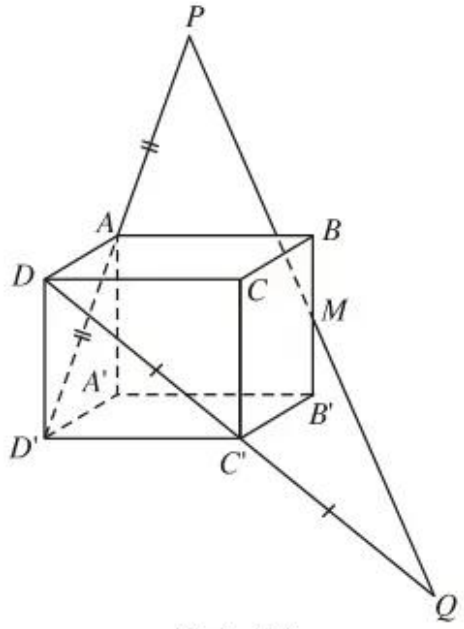
Mặt khác, các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 thuộc mặt phẳng, nên từ đẳng thức đó suy ra

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} - \frac{b}{d} = 1,$$

tức là $a + c = b + d$.

Như vậy $\dfrac{SA}{SA_1} + \dfrac{SC}{SC_1} = \dfrac{SB}{SB_1} + \dfrac{SD}{SD_1}$.

5. (h.137)



Hình 137

• Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = \dfrac{1}{2}m^2$

và $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = m^2$.

Gọi M là trung điểm của BB' thì

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}.$$

Do $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{D'A} = -\vec{a} - \vec{c}$

nên $\overrightarrow{MP} = -\dfrac{\vec{a}}{2} - \vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$.

$$= -\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}.$$

Mặt khác $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'Q}$

$$= \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DC'}$$

$$= \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Như vậy $\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{MQ}$, tức là ba điểm P, M, Q thẳng hàng hay đường thẳng PQ đi qua trung điểm của cạnh BB'.

• Ta có $PQ^2 = \overrightarrow{PQ}^2 = 4\overrightarrow{MP}^2$

$$= 4\left(\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = 4\left(\frac{9}{4}\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 3\vec{a}.\vec{b} + 3\vec{a}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c}\right)$$

$$= 4\left(\frac{9}{4}m^2 + m^2 + m^2 + \frac{3}{2}m^2 + \frac{3}{2}m^2 + m^2\right)$$

$$= 4 \cdot \frac{33}{4}m^2 = 33m^2 \Rightarrow PQ = m\sqrt{33}.$$

6. (h.138)

Cách 1. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

Từ giả thiết, ta có

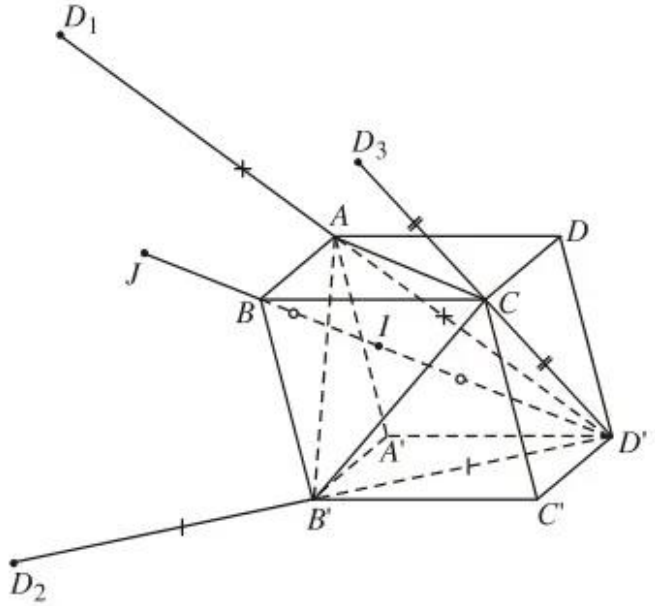
$\overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{BD_1} = 2\overrightarrow{BA} = -2\vec{b}$

mà $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Vậy $\overrightarrow{BD_1} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.

Lập luận tương tự như trên, ta có $\overrightarrow{BD_2} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

và $\overrightarrow{BD_3} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



Hình 138

Vậy $\overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{BD_2} + \overrightarrow{BD_3} + \overrightarrow{BD'} = \vec{0}$.

Điều này chứng tỏ B là trọng tâm của tứ diện $D_1D_2D_3D'$.

Cách 2.

Gọi I là giao điểm của BD' và mp$(AB'C)$ thì $D'I = 2IB$.

Gọi J là giao điểm của BD' với mp$(D_1D_2D_3)$, do D_1, D_2, D_3 là các điểm đối xứng của D' lần lượt qua A, B', C nên $IJ = ID'$ hay $D'B = \frac{3}{4}D'J$.

Mặt khác I là trọng tâm tam giác $AB'C$ nên J là trọng tâm tam giác $D_1D_2D_3$. Từ đó B là trọng tâm của tứ diện $D_1D_2D_3D'$.

7. (h.139)

a) Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Khi đó, ta có

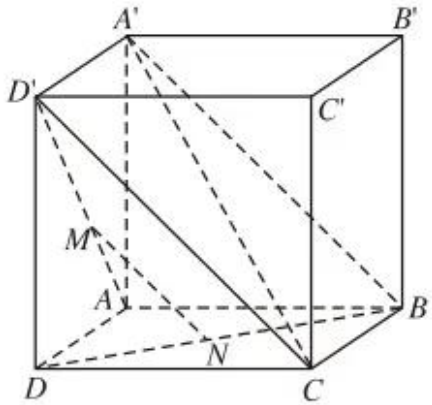
$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = 0$$

và $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2$.

Vì $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}$

nên $\overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD'})$.

Vậy $\overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}(\vec{a} + \vec{c})$.



Hình 139

Tương tự như trên, ta có

$$\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AD} - k\overrightarrow{AB}}{1-k} = -\frac{k}{1-k}\vec{b} + \frac{1}{1-k}\vec{c}.$$

Từ đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$

$$= \frac{1+k}{1-k}\vec{c} + \frac{k}{1-k}(\vec{a} - \vec{b})$$

hay $\overrightarrow{MN} = \frac{1+k}{1-k}\overrightarrow{BC} + \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA'}.$

Như vậy ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA'}$ đồng phẳng.

Mặt khác AD', DB cắt mp($A'BCD'$) ; các điểm M, N lần lượt thuộc AD', DB với $k \neq 0$, $k \neq 1$ nên MN không thuộc mp($A'BC$). Vậy MN song song với mp($A'BC$).

b) Ta có $\overrightarrow{A'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $A'C$, AD' chéo nhau ; $A'C$, BD chéo nhau mà $M \in AD'$, $N \in DB$. Do đó, đường thẳng MN song song với đường thẳng $A'C$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{A'C}$, tức là

$$\frac{k}{1-k}\vec{a} - \frac{k}{1-k}\vec{b} + \frac{1+k}{1-k}\vec{c} = -m\vec{a} + m\vec{b} + m\vec{c}.$$

Do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng nên đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{k}{1-k} = -m \\ -\dfrac{k}{1-k} = m \\ \dfrac{1+k}{1-k} = m. \end{cases}$$

Suy ra $-k = 1 + k \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}\cdot$

Vậy khi $k = -\frac{1}{2}$ thì MN song song với $A'C$.

Khi đó $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}).$

Mặt khác $\overrightarrow{AD'} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{c}$.

Vậy $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = -\frac{1}{3}(\vec{a}^2 - \vec{c}^2) = 0$

$$\overrightarrow{MN} \,.\, \overrightarrow{DB} = -\frac{1}{3}(-\vec{b}^2 + \vec{c}^2) = 0.$$

Điều này khẳng định MN vuông góc với AD' và DB.

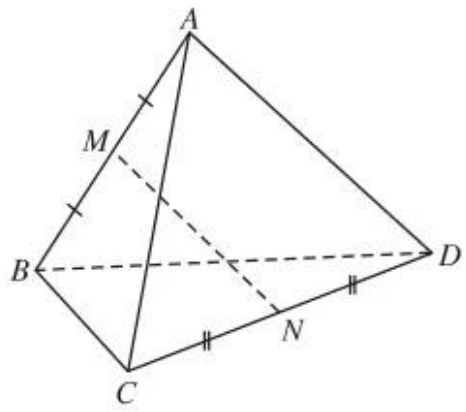
8. (h.140)

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Khi đó, ta có

$$\vec{a} \,.\, \vec{b} = \vec{b} \,.\, \vec{c} = \vec{c} \,.\, \vec{a} = \frac{1}{2}m^2$$

và $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = m^2$.



Hình 140

a) Vì M, N là trung điểm của AB và CD nên

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

hay $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})$.

Vậy $MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{c}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{c} - 2\vec{a}.\vec{b} - 2\vec{b}.\vec{c})$

$$= \frac{1}{4}(m^2 + m^2 + m^2 + m^2 - m^2 - m^2) = \frac{2m^2}{4}.$$

Tức là $MN = \frac{m\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}).\vec{b}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} - \vec{b}^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2} - m^2\right) = 0$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và AB bằng 90°.

Ta có

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{c})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{a}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c} - \vec{c}^2 + \vec{b}.\vec{c})$$

$$= \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} - m^2 + \frac{m^2}{2}\right) = 0.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và CD bằng 90°.

Ta có

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})(-\vec{b} + \vec{c})$$

$$= \frac{1}{2}(-\vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{c} + \vec{b}^2 + \vec{a}.\vec{c} + \vec{c}^2 - \vec{b}.\vec{c})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} + m^2 + \frac{m^2}{2} + m^2 - \frac{m^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m^2.$$

Tức là $\quad |\overrightarrow{MN}|.|\overrightarrow{BC}|\cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}m^2.$

Từ đó $\quad \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\frac{m^2}{2}}{m.\frac{m\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BC bằng 45°.

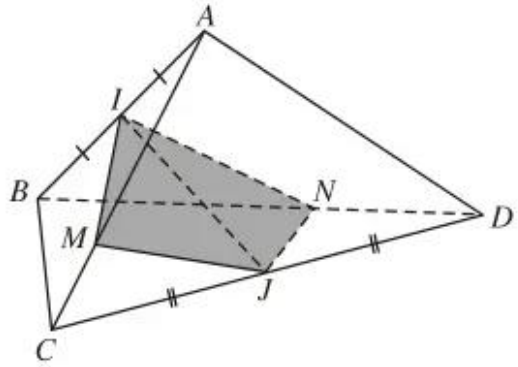
9. (h.141)

Vì $\overrightarrow{MA} = k_1\overrightarrow{MC}$

nên $\overrightarrow{IM} = \dfrac{\overrightarrow{IA} - k_1\overrightarrow{IC}}{1 - k_1}.$

Tương tự, ta có

$$\overrightarrow{IN} = \frac{\overrightarrow{IB} - k_2\overrightarrow{ID}}{1 - k_2} = \frac{-\overrightarrow{IA} - k_2\overrightarrow{ID}}{1 - k_2}.$$



Hình 141

Mặt khác $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$.

Để các điểm I, J, M, N thuộc một mặt phẳng, điều kiện cần và đủ là ba vectơ $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IJ}$ đồng phẳng. Rõ ràng là $\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{IJ}$ không cùng phương nên điều khẳng định $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IJ}$ đồng phẳng tương đương với

$$\overrightarrow{IM} = p\overrightarrow{IN} + q\overrightarrow{IJ}$$

hay $$\frac{\overrightarrow{IA} - k_1\overrightarrow{IC}}{1-k_1} = p.\frac{-\overrightarrow{IA} - k_2\overrightarrow{ID}}{1-k_2} + \frac{q}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-k_1} + \frac{p}{1-k_2}\right)\overrightarrow{IA} - \left(\frac{k_1}{1-k_1} + \frac{q}{2}\right)\overrightarrow{IC} + \left(\frac{pk_2}{1-k_2} - \frac{q}{2}\right)\overrightarrow{ID} = \vec{0}.$$

Do $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}$ không đồng phẳng nên đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-k_1} + \dfrac{p}{1-k_2} = 0 \\ \dfrac{k_1}{1-k_1} + \dfrac{q}{2} = 0 \\ \dfrac{pk_2}{1-k_2} - \dfrac{q}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k_1}{1-k_1} = -\frac{pk_2}{1-k_2} = \frac{k_2}{1-k_1}$$

hay $k_1 = k_2$.

10. Lấy E_1, E_2, E_3 lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz sao cho $OE_1 = OE_2 = OE_3$.

Đặt $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2, \overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3$.

a) Do ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng nên

$$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 > 0,$$

tức là $$\vec{e}_1^2 + \vec{e}_2^2 + \vec{e}_3^2 + 2(\vec{e}_1.\vec{e}_2 + \vec{e}_2.\vec{e}_3 + \vec{e}_3.\vec{e}_1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3OE_1^2 + 2OE_1^2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) > 0.$$

Vậy $$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\frac{3}{2}.$$

b) Dễ thấy $\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2} // Ox_1$

$\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_3} // Oy_1$

$\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1} // Oz_1$.

$Ox_1 \perp Oy_1 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2})(\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_3}) = 0$

hay $\overrightarrow{OE_2}^2 + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_2}.\overrightarrow{OE_3} = 0.$

Ta có

$(\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2})(\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1}) = \overrightarrow{OE_1}^2 + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_2}.\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_3} = 0.$

Vậy $Ox_1 \perp Oz_1$.

Tương tự, ta cũng có $Oy_1 \perp Oz_1$.

11. a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

b) $m^2 + n^2 + p^2 > 0$.

12. Theo giả thiết, ta có

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AA_1},\ \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{BB_1},\ \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{CC_1}.$$

Do (α), (β), (γ) song song với nhau, hai đường thẳng Δ, Δ_1 cắt chúng lần lượt tại A, B, C và A_1, B_1, C_1 nên theo định lí Ta-lét, ta có

$$\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BC} \text{ và } \overrightarrow{B_1A_1} = k\overrightarrow{B_1C_1}.$$

Từ $\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BC}$ nên với điểm O, ta có

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OC}}{1-k}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{\overrightarrow{OA_1} - k\overrightarrow{OC_1}}{1-k}.$$

Từ đó $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} = \dfrac{\overrightarrow{AA_1}}{1-k} - \dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{CC_1}$

hay $\overrightarrow{OJ} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{OI} - \dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{OK}.$

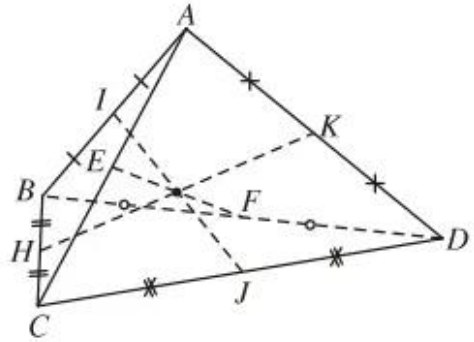
Lấy O trùng với I, ta có $\overrightarrow{IJ} = -\dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{IK}.$

Như vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

13. (h.142)

Trước hết, ta chứng minh

$AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2 + 4IJ^2$.



Hình 142

Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Ta có

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$$

$$= -\frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{DC}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{a}) + \left(\frac{\vec{c}}{2}\right) = \frac{-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}{2}.$$

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 4\overrightarrow{IJ}^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 + \vec{c}^2 + (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2$$

$$= 2\vec{b}^2 + 2\vec{a}^2 + 2\vec{c}^2 - 2\vec{a}.\vec{c} - 2\vec{b}.\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 = (\vec{c} - \vec{a})^2 + \vec{b}^2 + (\vec{c} - \vec{b})^2 + \vec{a}^2$$

$$= 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 + 2\vec{c}^2 - 2\vec{a}.\vec{c} - 2\vec{b}.\vec{c}.$$

Vậy, ta có

$$AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2 + 4IJ^2$$

Tương tự, ta có

$$AC^2 + BD^2 + AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 + 4HK^2$$

$$AB^2 + CD^2 + BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2.$$

Từ đó

$$AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = 4(IJ^2 + HK^2 + EF^2).$$

14. (h.143)

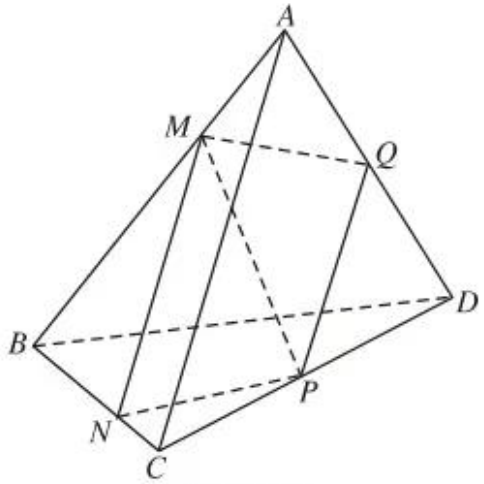
Cách 1

Từ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, ta có $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$,

mặt khác $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

nên $MN \,//\, AC$.

Nếu có k để các điểm M, N, P, Q thuộc một mặt phẳng thì mp(MNQ) cắt mp(ACD) theo giao tuyến PQ nên $PQ \,//\, AC$.



Hình 143

Mặt khác $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

nên $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

Vậy $k = \frac{1}{2}$ thì các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Cách 2

Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

Khi đó $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

Do $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = -\vec{a} + k\overrightarrow{DC} = -\vec{a} + k\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\vec{a}.$$

Khi đó

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MP} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MQ} = -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}.$$

Các điểm M, N, P, Q thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi có số x, y sao cho

$$\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c} = -\frac{2}{3}x\vec{a} + \frac{2}{3}x\vec{c} - \frac{1}{6}y\vec{a} - \frac{1}{3}y\vec{b}.$$

Do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên điều đó tương đương với

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}y = -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}x = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = 1, x = \frac{3}{4}, k = \frac{1}{2}.$$

Vậy khi $k = \frac{1}{2}$ thì các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

15. (h.144)

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Vì M thuộc đường thẳng AA' nên

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA'} = k\vec{c} \ ;$$

N là điểm thuộc đường thẳng BC nên

$$\overrightarrow{BN} = l\vec{a} \ ;$$

P là điểm thuộc đường thẳng $C'D'$ nên

$$\overrightarrow{C'P} = m\vec{b}.$$

Với k, l, m là những số thực.

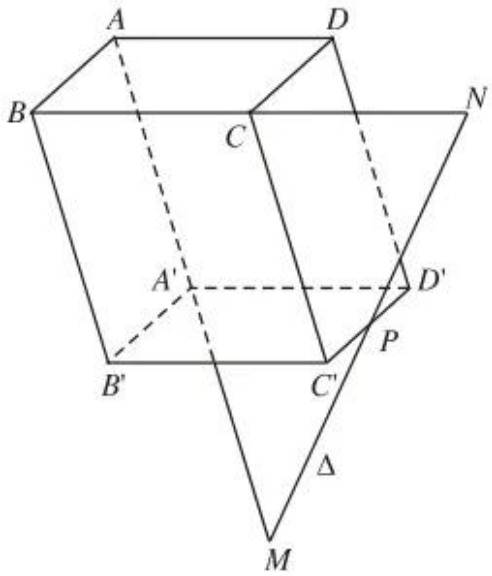
Ta có

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c}$$

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'P}$$

$$= -l\vec{a} + \vec{c} + \vec{a} + m\vec{b}$$

$$= (1 - l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}.$$



Hình 144

Do $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$ nên ta có

$$\begin{cases} -l = 2(1 - l) \\ -1 = 2m \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow k = 2, m = -\frac{1}{2}, \ l = 2.$$

Vậy $$\frac{MA}{MA'} = 2.$$