Chương III VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

A - KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI

§1. Vectơ trong không gian. Sự đồng phẳng của các vectơ

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa vectơ và các phép toán vectơ trong không gian cũng giống như trong mặt phẳng. Ngoài ra cần biết :

1. *Quy tắc hình hộp để cộng vectơ trong không gian.*

2. *Khái niệm và điều kiện đồng phẳng của ba vectơ, cụ thể :*

a) *Ba vectơ* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *gọi là đồng phẳng nếu ba đường thẳng chứa chúng cùng song song với một mặt phẳng.*

b) *+ Điều kiện để ba vectơ* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *đồng phẳng là có các số m, n, p không đồng thời bằng 0 sao cho* $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.

+ Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$. *Khi đó, ba vectơ* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *đồng phẳng khi và chỉ khi có các số m, n sao cho* $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. *Hơn nữa, các số m, n là duy nhất.*

c) *Nếu ba vectơ* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *không đồng phẳng thì với mỗi vectơ* $\vec{d}$ *đều có thể viết dưới dạng* $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, *với các số m, n, p xác định duy nhất.*

II - ĐỀ BÀI

1. Cho tứ diện $ABCD$, M và N là các điểm lần lượt thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$; Các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}, \overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, K thẳng hàng.

2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$; Các điểm M, N lần lượt thuộc các đường thẳng CA và DC' sao cho $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{ND} = m\overrightarrow{NC'}$. Xác định m để các đường thẳng MN và BD' song song với nhau. Khi ấy, tính MN biết $\widehat{ABC} = \widehat{ABB'} = \widehat{CBB'} = 60^o$ và $BA = a$, $BB' = b$, $BC = c$.

3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BB' và $A'C'$. Điểm K thuộc $B'C'$ sao cho $\overrightarrow{KC'} = -2\overrightarrow{KB'}$. Chứng minh rằng bốn điểm A, I, J, K cùng thuộc một mặt phẳng.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) bất kì không đi qua S, cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1, D_1. Dùng phương pháp vectơ, chứng minh rằng

$$\frac{SA}{SA_1} + \frac{SC}{SC_1} = \frac{SB}{SB_1} + \frac{SD}{SD_1}.$$

5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng m, các góc tại A bằng 60° ($\widehat{BAD} = \widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 60^o$). Gọi P và Q là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{D'A}$, $\overrightarrow{C'Q} = \overrightarrow{DC'}$. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua trung điểm của cạnh BB'. Tính độ dài đoạn thẳng PQ.

6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi D_1, D_2, D_3 lần lượt là điểm đối xứng của điểm D' qua A, B', C. Chứng tỏ rằng B là trọng tâm của tứ diện $D_1D_2D_3D'$.

7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là các điểm thuộc AD' và DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}$, $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$ $(k \neq 0, k \neq 1)$.

a) Chứng minh rằng MN luôn song song với mp$(A'BC)$.

b) Khi đường thẳng MN song song với đường thẳng $A'C$, chứng tỏ rằng MN vuông góc với AD' và DB.

8. Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng m. Các điểm M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính độ dài MN.

b) Tính góc giữa đường thẳng MN với các đường thẳng BC, AB và CD.

9. Cho hình tứ diện $ABCD$; I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD ; M là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{MA} = k_1\overrightarrow{MC}$; N là điểm thuộc BD sao cho

$\overrightarrow{NB} = k_2\overrightarrow{ND}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, M, N cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi $k_1 = k_2$.

10. Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng.

a) Đặt $\widehat{xOy} = \alpha$, $\widehat{yOz} = \beta$, $\widehat{zOx} = \gamma$. Chứng minh rằng

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\frac{3}{2}\cdot$$

b) Gọi Ox_1, Oy_1, Oz_1 lần lượt là các tia phân giác của các góc xOy, yOz, zOx. Chứng minh rằng nếu Ox_1 và Oy_1 vuông góc với nhau thì Oz_1 vuông góc với cả Ox_1 và Oy_1.

11. Trong không gian cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác vectơ – không.

a) Nếu có $\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c} = \vec{0}$ thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có đồng phẳng không ?

b) Giả sử có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ trong đó m, n, p là các số thực. Với điều kiện nào của m, n, p thì ba vectơ đó đồng phẳng ?

12. Cho hai đường thẳng Δ, Δ_1 cắt ba mặt phẳng song song (α),(β), (γ) lần lượt tại A, B, C và A_1, B_1, C_1. Với điểm O bất kì trong không gian, đặt $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{CC_1}$. Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.

13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, H, K, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, AD, AC, BD. Chứng minh rằng

$$AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = 4(IJ^2 + HK^2 + EF^2).$$

14. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$. Hãy xác định k để bốn điểm P, Q, M, N cùng nằm trên một mặt phẳng.

15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng AA', BC, $C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}\cdot$