§2, §3, §4. Hai đường thẳng vuông góc. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Hai mặt phẳng vuông góc

16. (h.145)

a) Vì $BC // AD$ nên góc giữa SD và BC bằng góc giữa SD và AD.

Từ giả thiết, ta có $SA \perp BC$

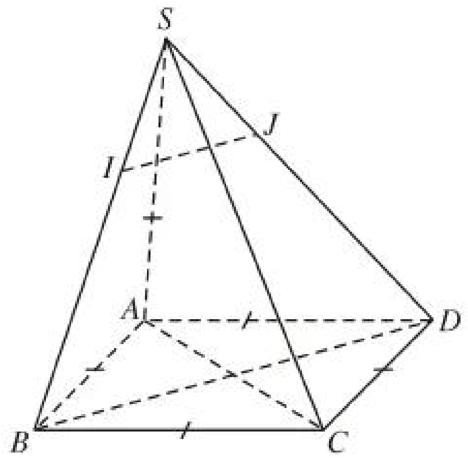
nên $SA \perp AD$

mặt khác SA bằng cạnh của hình thoi $ABCD$, nên $\widehat{SDA} = 45^o$ là góc phải tìm.

Vậy góc giữa BC và SD bằng 45^o.

b) Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$.

Mặt khác $IJ // BD$ nên $AC \perp IJ$ tức là góc giữa IJ và AC bằng 90^o không đổi.



Hình 145

17. (h.146)

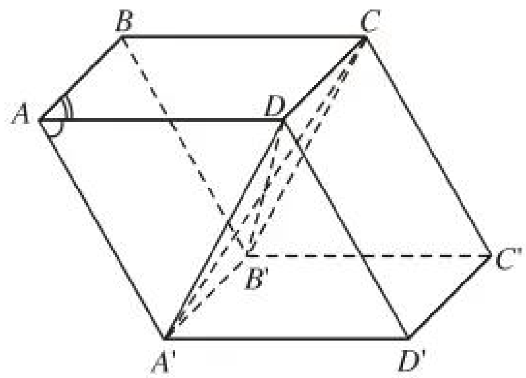
Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{z}$ thì

$$\vec{x}^2 = \vec{y}^2 = \vec{z}^2 = a^2$$

$$\vec{x}.\vec{y} = \frac{a^2}{2} \ ;$$

$$\vec{x}.\vec{z} = -\frac{a^2}{2} \ ;$$

$$\vec{y}.\vec{z} = -\frac{a^2}{2} \cdot$$



Hình 146

a) • Vì $AB // A'B'$ nên góc giữa AB và $A'D$ bằng góc giữa $A'B'$ và $A'D$, đó là góc $\widehat{DA'B'}$ hoặc $180^o - \widehat{DA'B'}$.

Đặt $\widehat{DA'B'} = \alpha$.

Ta có $\quad A'D = a\sqrt{3}, \quad A'B' = a.$

$$\overrightarrow{DB'} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{DB'}^2 = 3a^2 - a^2 - a^2 + a^2 = 2a^2.$$

Vậy $2a^2 = a^2 + 3a^2 - 2a.a\sqrt{3}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot$

Như thế góc giữa $A'D$ và AB bằng α mà $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot$

• $\overrightarrow{AC'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{AC'}^2 = 3a^2 + a^2 - a^2 - a^2 = 2a^2.$

Dễ thấy $AB' = a$.

Ta có $ADC'B'$ là hình bình hành mà $AD = AB'$, $AC' = B'D$ nên tứ giác $ADC'B'$ là hình vuông. Vậy $AC' \perp B'D$, tức là góc giữa AC' và $B'D$ bằng 90^o.

b) $S_{A'B'CD} = A'D.A'B'\sin\widehat{DA'B'} = a\sqrt{3}.a.\dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

Vậy $S_{A'B'CD} = a^2\sqrt{2}$.

Đặt $\widehat{ACC'} = \beta$ thì $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 - 2AC.CC'.\cos\beta$

hay $\qquad 2a^2 = 3a^2 + a^2 - 2a\sqrt{3}.a.\cos\beta$

$\Rightarrow \qquad \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot$

Vậy $\qquad S_{ACC'A'} = AC.CC'.\sin\beta = a\sqrt{3}.a.\dfrac{\sqrt{6}}{3} = a^2\sqrt{2}$.

c) Do $\overrightarrow{AC'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$.

Suy ra :

• $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})\vec{x}$

$$= a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = a^2$$

hay $\qquad |\overrightarrow{AC'}||\overrightarrow{AB}|\cos\gamma = a^2$

$\Rightarrow \qquad \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \gamma = 45^o.$

Vậy góc giữa AC' và AB bằng 45^o.

• $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AD} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})\vec{y}$

$$= \frac{a^2}{2} + a^2 - \frac{a^2}{2} = a^2$$

hay $\quad \left|\overrightarrow{AC'}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos\varphi = a^2$

$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^{\circ}.$

Vậy góc giữa AC' và AD bằng 45°.

• $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AA'} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})\vec{z}$

$$= -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + a^2 = 0.$$

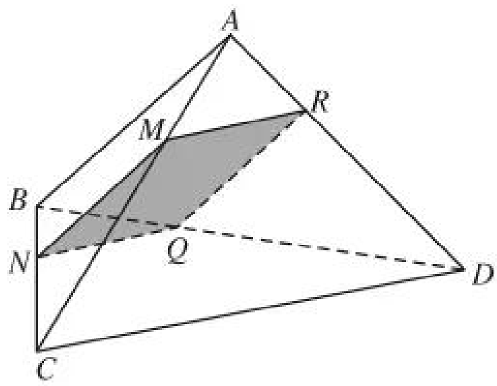
Vậy góc giữa AC' và AA' bằng 90°.

18. (h.147)

a) Dễ thấy thiết diện là hình bình hành $MNQR$ và $S_{MNQR} = NM.NQ.\sin\widehat{MNQ}$.

Do $\quad MN \parallel AB,\ NQ \parallel CD$

nên góc giữa MN và NQ bằng góc giữa AB và CD, do đó $\sin\widehat{MNQ} = \sin\alpha$.



Hình 147

Ta có

$$\frac{MN}{AB} = \frac{AC - x}{AC} \Rightarrow MN = \frac{AB}{AC}(AC - x)$$

$$NQ = MR,\quad \frac{MR}{CD} = \frac{AM}{AC} = \frac{x}{AC} \Rightarrow MR = \frac{CD}{AC}x.$$

Vậy $\quad S_{MNQR} = \dfrac{AB.CD}{AC^2}(AC - x)x\sin\alpha.$

Từ đó diện tích thiết diện $MNQR$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x = \dfrac{AC}{2}\cdot$

Như vậy, khi M là trung điểm của AC thì diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (P) đạt giá trị lớn nhất.

b) Gọi P là nửa chu vi của thiết diện, khi đó

$$p = MN + MR = \frac{AB}{AC}(AC - x) + \frac{CD}{AC}x$$

$$= \frac{CD - AB}{AC}x + AB.$$

Từ đó, chu vi thiết diện không phụ thuộc vào x khi và chỉ khi

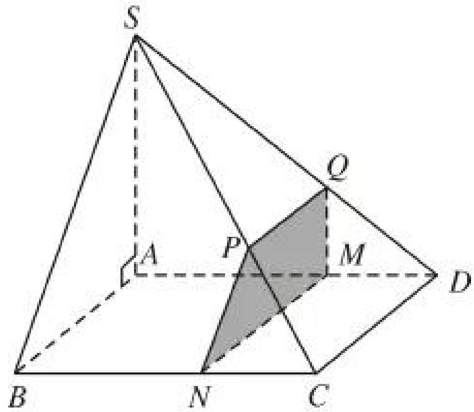
$$CD - AB = 0$$

hay $\quad AB = CD.$

19. (h.148)

a) Dễ thấy thiết diện là tứ giác $MNPQ$, trong đó $MN \parallel QP \parallel CD$, $MQ \parallel SA$.

Do $SA \perp AB$, $AB \parallel MN$, $MQ \parallel SA$ nên thiết diện $MNPQ$ là hình thang vuông tại M.



Hình 148

b) $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ$.

Do M là trung điểm của AD nên

$$MQ = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}b$$

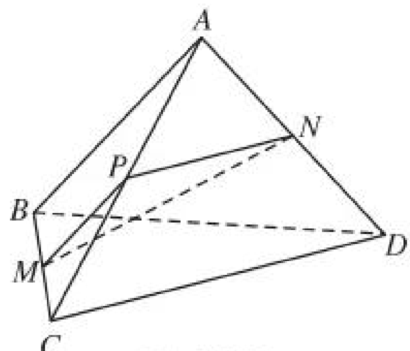
$$PQ = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}a$$

$$MN = a.$$

Vậy $\quad S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{b}{2} = \frac{3ab}{8}$.

20. (h.149)

Kẻ $MP \parallel AB$ thì dễ thấy $NP \parallel CD$. Từ đó, góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BA}$ bằng góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$, đó là góc $\widehat{PMN}$. Góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$, đó là góc $\widehat{PNM}$.



Hình 149

Vậy hai góc trên bằng nhau và bằng 45^{o} khi và chỉ khi

$$MP = NP \text{ và } \widehat{MPN} = 90^{o}.$$

Từ đó, suy ra $\dfrac{CP}{CA}.AB = \dfrac{AP}{AC}.CD$ và $AB \perp CD$

hay $$\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AP}{CP} \text{ và } AB \perp CD.$$

Mặt khác, ta có $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PC} \Rightarrow \dfrac{AP}{PC} = |k|$.

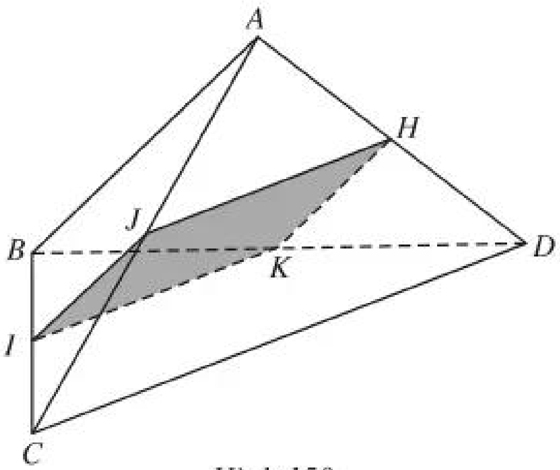
Vậy giữa AB và CD có mối liên hệ

$$\dfrac{AB}{CD} = |k| \text{ và } AB \perp CD$$

thì góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BA}$ bằng góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CD}$, cùng bằng 45^{o}.

21. (h.150)

Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng góc giữa hai đường thẳng IJ và IK, đó là góc $\widehat{JIK}$ hoặc $180^{o} - \widehat{JIK}$.



Hình 150

a) Vì tứ giác $IJHK$ là hình thoi mà $IH = \sqrt{3}IJ$, nên từ $JK^2 + IH^2 = 4IJ^2$

ta có $JK^2 = IJ^2$

hay $JK = IJ$.

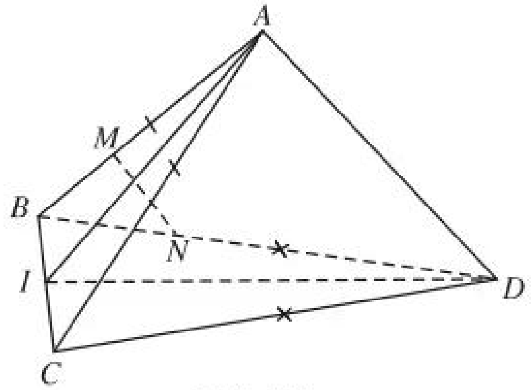
Như vậy JIK là tam giác đều, do đó $\widehat{JIK} = 60^{o}$.

Vậy góc giữa AB và CD trong trường hợp này bằng 60^{o}.

b) Khi tứ giác $IJHK$ là hình chữ nhật thì $\widehat{JIK} = 90^{o}$. Do đó, góc giữa AB và CD bằng 90^{o}.

22. (h.151)

a) Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$, $DI \perp BC$.



Hình 151

Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$.

Xét $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID})$

$= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{ID} = 0.$

Vậy $BC \perp AD$.

b) Từ giả thiết $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$

ta có $MN \,//\, AD$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BC bằng góc giữa hai đường thẳng AD và BC. Theo câu a) thì AD vuông góc BC, nên góc giữa MN và BC bằng 90°.

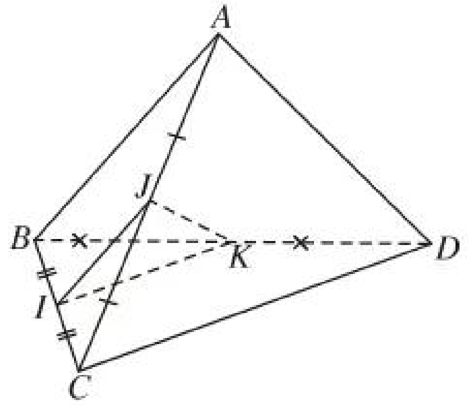
23. (h.152)

Ta có $IJ = \dfrac{1}{2}AB$

$IK = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{2}{3}AB$

$IJ^2 + IK^2 = \dfrac{1}{4}AB^2 + \dfrac{4}{9}AB^2$

$= \dfrac{25}{36}AB^2$



Hình 152

mà $JK^2 = \dfrac{25}{36}AB^2$ nên $IJ^2 + IK^2 = JK^2$.

Vậy $JI \perp IK$.

Do $IJ \,//\, AB$, $IK \,//\, CD$ nên góc giữa AB và CD bằng 90°.

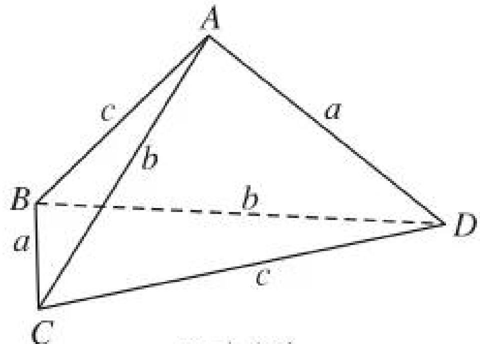
Mặt khác $IJ \,//\, AB$ mà $AB \perp CD$ nên $IJ \perp CD$.

Vậy góc giữa IJ và CD bằng 90°.

24. (h.153)

Áp dụng ví dụ 2 (§1 chương III, SGK Hình học 11 nâng cao), ta có

$$\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{2c^2 - 2b^2}{2a^2} = \frac{c^2 - b^2}{a^2}.$$



Hình 153

Vậy nếu góc giữa BC và AD bằng α thì

$$\cos\alpha = \frac{|c^2 - b^2|}{a^2}$$

hay $\quad a^2\cos\alpha = |c^2 - b^2|.$

Tương tự như trên, nếu gọi β là góc giữa AC và BD thì

$$b^2\cos\beta = |a^2 - c^2|$$

và γ là góc giữa AB và CD thì

$$c^2\cos\gamma = |b^2 - a^2|.$$

Với a, b, c lần lượt là độ dài của BC, CA, AB, không giảm tính tổng quát có thể coi $a \geq b \geq c$. Khi đó

$$a^2\cos\alpha = b^2 - c^2$$
$$b^2\cos\beta = a^2 - c^2$$
$$c^2\cos\gamma = a^2 - b^2.$$

Từ đó, trong trường hợp này ta có $b^2\cos\beta = a^2\cos\alpha + c^2\cos\gamma$.

25. (h.154)

a) Từ $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IC}$

$\overrightarrow{JA} = k\overrightarrow{JC}$

ta có $IJ \parallel AB$.

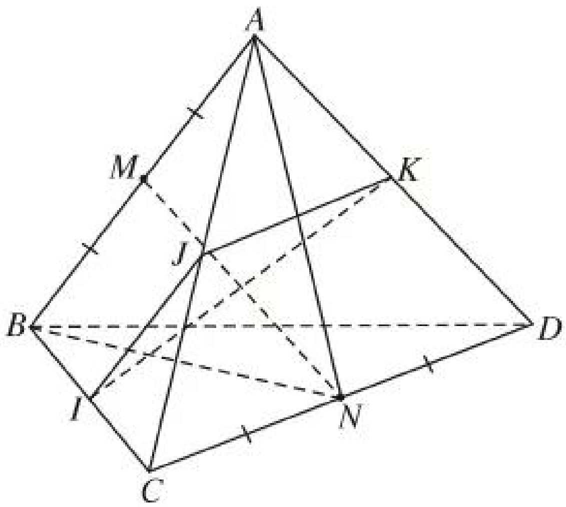
Tương tự, ta có $JK \parallel CD$.

Do các cạnh của tứ diện $ABCD$ bằng nhau và N là trung điểm của CD nên $NA = NB$.

Mặt khác $MA = MB$,

do đó $MN \perp AB$, suy ra $MN \perp IJ$.

Tương tự như trên, ta có $MN \perp CD$ và $JK \parallel CD$ nên $MN \perp JK$.



Hình 154

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}$.

Từ giả thiết, ta có

$AN \perp CD$ tức là $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CD} = 0$;

$BN \perp CD$ tức là $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CD} = 0$.

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}).\overrightarrow{CD} = 0$ tức là $AB \perp CD$.

26. (h.155)

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành và $O = AC \cap BD$ nên $OA = OC$ và $OB = OD$. Mặt khác $SA = SC$ nên $SO \perp AC$ và $SB = SD$ nên $SO \perp BD$.

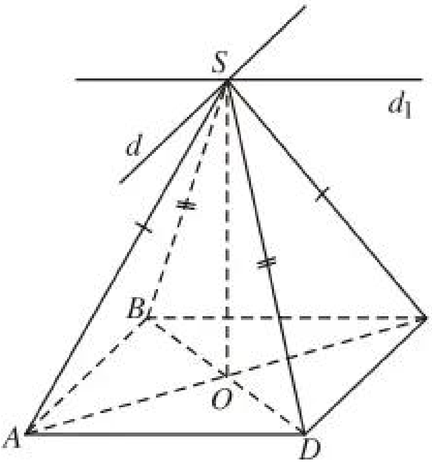
Vậy $SO \perp \text{mp}(ABCD)$.

b) Vì $AB \parallel CD$

mà $d = \text{mp}(SAB) \cap \text{mp}(SCD)$

nên $d \parallel AB$ và d qua S.

Tương tự $d_1 \parallel AD$ và d_1 qua S.



Hình 155

Do $SO \perp \text{mp}(ABCD)$ nên $SO \perp d$, $SO \perp d_1$.

Vậy $SO \perp \text{mp}(d, d_1)$.

27. (h.156)

a) Ta có $\left.\begin{array}{r} AB \perp (BCE) \\ CH \perp BE \end{array}\right\} \Rightarrow CH \perp AH.$

Vậy ACH là tam giác vuông tại H.

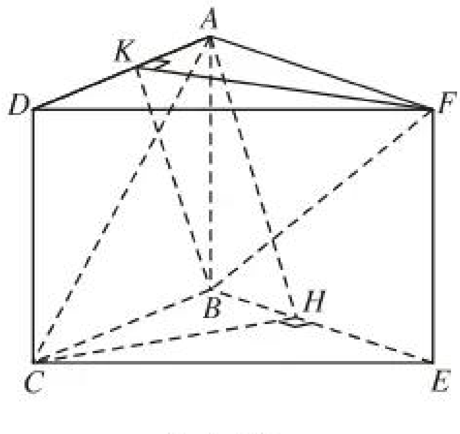
Tương tự, ta có BKF là tam giác vuông tại K.

b) Ta có $\left.\begin{array}{r} CH \perp BE \\ CH \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow CH \perp BF.$

Mặt khác $AC \perp BF$.

Vậy $BF \perp AH$.

Tương tự, ta có $AC \perp BK$.



Hình 156

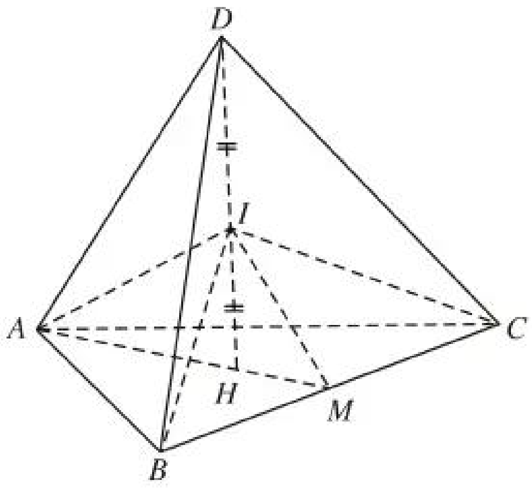
28. (h.157)

a) Kí hiệu cạnh của tứ diện đã cho là a, dễ thấy H là trọng tâm của tam giác ABC. Từ đó

$$DH^2 = DA^2 - AH^2$$

$$= a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6a^2}{9}$$

$$\Rightarrow DH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



Hình 157

Do I là trung điểm của DH nên

$$IH = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Khi đó $IM^2 = IH^2 + HM^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{4},$

tức là $IM = \frac{a}{2}.$

Xét tam giác IBC có IM là trung tuyến và $IM = \frac{1}{2}BC$. Vậy $IB \perp IC$.

Tương tự như trên, ta có IA, IB, IC đôi một vuông góc.

b) Vì IA, IB, IC đôi một vuông góc, $IA = IB = IC$ và H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (ABC) nên ABC là tam giác đều nhận H làm trọng tâm. Ngoài ra $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} + \frac{1}{IC^2} = \frac{3}{IA^2}$ hay $IH = \frac{IA}{\sqrt{3}}.$

Do D là điểm đối xứng của H qua I nên

$$DH = \frac{2IA}{\sqrt{3}} \text{ và } DA = DB = DC.$$

Đặt $IA = x$ thì $DH = \frac{2x}{\sqrt{3}}$, $AB = x\sqrt{2}$.

Khi đó $DA^2 = DH^2 + HA^2 = \dfrac{4x^2}{3} + \left(\dfrac{x\sqrt{2}.\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$$= \frac{4x^2}{3} + \frac{2x^2}{3} = 2x^2.$$

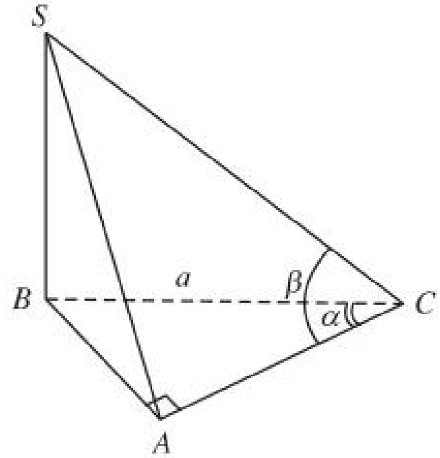
Vậy $DA = DB = DC = x\sqrt{2}$.

Do đó tứ diện *DBCA* có các cạnh bằng nhau.

29. (h.158)

a) $SB \perp (ABC)$ và

$BA \perp AC$ nên $SA \perp AC$ tức là SAC là tam giác vuông tại A.



Hình 158

b) Ta có $AC = a\cos\alpha$

$$SA = AC\tan\beta = a\cos\alpha\tan\beta$$

$$SC = \frac{AC}{\cos\beta} = \frac{a\cos\alpha}{\cos\beta}$$

$$SB^2 = SC^2 - BC^2 = \frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos^2\beta} - a^2$$

$$= \frac{a^2(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)}{\cos^2\beta}.$$

Vậy $$SB = \frac{a}{\cos\beta}.\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

(Điều kiện để bài toán có nghĩa là α, β phải thoả mãn $\cos^2\alpha > \cos^2\beta$).

30. (h.159)

a) Ta có $SB = SD = a\sqrt{2}$, $AC = a$

(vì ABC là tam giác cân mà $\widehat{ABC} = 60^\circ$).

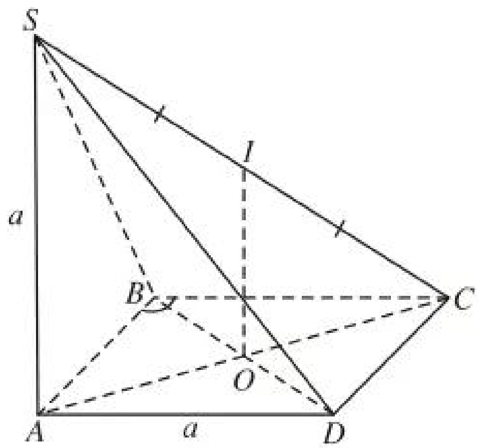
Vậy $SC = a\sqrt{2}$.

b) Gọi $O = AC \cap BD$ thì

$IO \parallel SA$ nên $IO \perp (ABCD)$, từ đó

$IO \perp BD$.

Mặt khác $OB = OD$ nên BID là tam giác cân tại I, tức là $IB = ID$.



Hình 159

31. Giả sử $ABCD$ là tứ diện có tính chất $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$.

Từ bài tập 20 chương III SGK Hình học 11 nâng cao, ta có

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2.$$

Từ đó, ta có

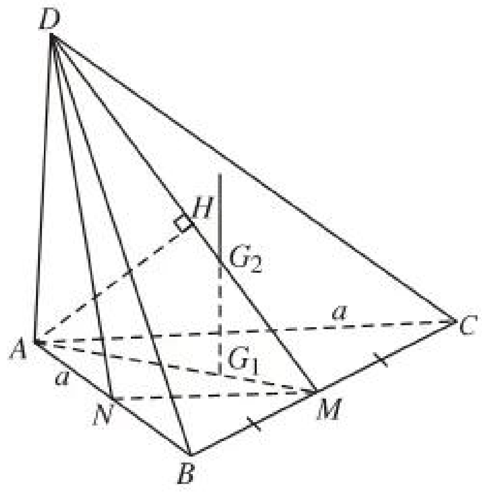
$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = AC^2 + AD^2 - CD^2 = AD^2 + AB^2 - BD^2.$$

Hệ thức này khẳng định các góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{CAD}$, $\widehat{DAB}$ hoặc cùng nhọn, cùng vuông hoặc cùng tù.

Tương tự như trên, ta chứng minh được ba góc tại bất cứ đỉnh nào của tứ diện $ABCD$ cũng có tính chất đó. Do tính chất tổng các góc trong của một tam giác bằng 180^o nên tồn tại nhiều nhất một đỉnh của tứ diện mà tại đó ba góc cùng vuông hay cùng tù. Khi ấy mặt đối diện với đỉnh đó của tứ diện $ABCD$ có cả ba góc đều nhọn.

Vậy nếu $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ và $AD \perp BC$ thì trong bốn mặt của tứ diện $ABCD$ có ít nhất một mặt là tam giác nhọn (cả ba góc của nó nhỏ hơn 90^o).

32. (h.160)



Hình 160

a) Vì M là trung điểm của BC nên $AM \perp BC$, mặt khác $DA \perp (ABC)$ nên BC vuông góc với mp(DAM), từ đó $BC \perp AH$.

Mà $\quad DM \perp AH$.

Vậy $\quad AH \perp$ mp(DBC).

b) Kẻ MN song song với AC ($N \in AB$) thì góc giữa DM và AC bằng góc giữa DM và MN, đó là $\widehat{DMN}$ hoặc $180^o - \widehat{DMN}$.

Ta có $MN = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2}$, $AN = \dfrac{a}{2}\cdot$

$$DN^2 = DA^2 + AN^2 = \frac{16}{25}a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{89}{100}a^2$$

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = a^2 - \frac{9a^2}{25} = \frac{16a^2}{25}$$

$$\Rightarrow \quad AM = \frac{4a}{5}.$$

Mặt khác $AD = \frac{4a}{5}$ do đó $DM = \frac{4a\sqrt{2}}{5}$.

$$DN^2 = DM^2 + MN^2 - 2DM.MN\cos\widehat{DMN}$$

$$\frac{89}{100}a^2 = \frac{2.16a^2}{25} + \frac{a^2}{4} - 2\cdot\frac{4a\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{a}{2}\cos\widehat{DMN}$$

$$= \frac{153a^2}{100} - \frac{4a^2\sqrt{2}}{5}\cos\widehat{DMN}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4a^2\sqrt{2}}{5}\cos\widehat{DMN} = \frac{64a^2}{100}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\widehat{DMN} = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

Vậy góc giữa AC và DM là α mà $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

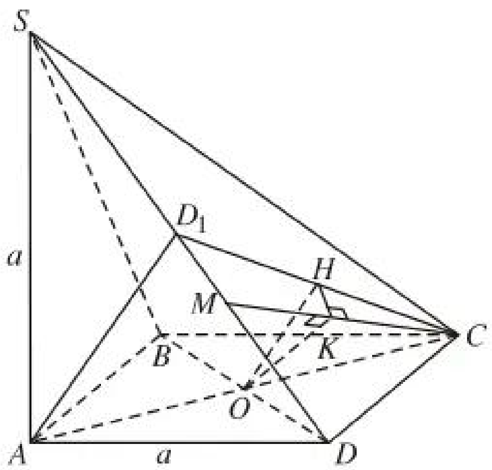
c) Dễ thấy $G_1G_2 \parallel DA$ mà $DA \perp (ABC)$

nên $G_1G_2 \perp (ABC)$.

33. (h.161)

a) Vì $SA = AD = a$ và D_1 là trung điểm của SD nên $AD_1 \perp SD$. Mặt khác, ta có $CD \perp (SAD)$ nên $AD_1 \perp CD$. Vậy $AD_1 \perp (SCD)$.

b) Kẻ $OH \parallel AD_1$ thì H là trung điểm của D_1C và $OH \perp (SCD)$, ngoài ra H cố định.

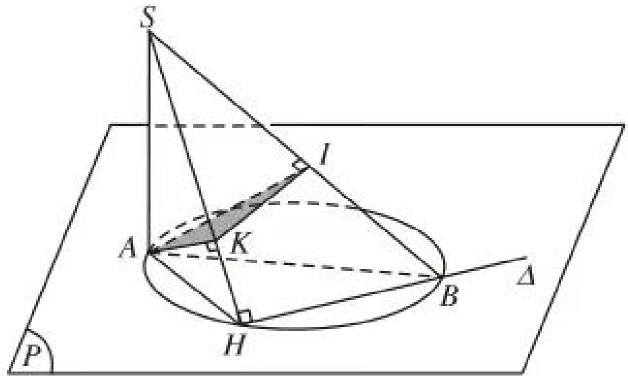


Hình 161

Gọi K là hình chiếu của O trên CM thì $HK \perp KC$ (định lí ba đường vuông góc). Từ đó, suy ra điểm K thuộc đường tròn đường kính HC trong mp(SCD). Đó là đường tròn cố định chứa hình chiếu của tâm hình vuông trên mặt phẳng (SCD)

34. (h.162)

a) Vì $SA \perp (P)$, $\Delta \subset (P)$, $SH \perp \Delta$ nên $AH \perp HB$ (định lí ba đường vuông góc). Như vậy $\widehat{AHB} = 90^o$. Do A, B cố định thuộc (P), $H \in (P)$ nên điểm H thuộc đường tròn đường kính AB cố định trong (P).



Hình 162

b) – Vì $HB \perp (SAH)$ nên $HB \perp AK$, mặt khác $AK \perp SH$ nên $AK \perp (SHB)$.

Vậy $AK \perp SI$. Do giả thiết $AI \perp SB$, từ đó $SB \perp (AKI)$.

S, B, A là các điểm cố định nên mp(AKI) cố định và I cố định.

Do $AK \perp (SHB)$ nên $AK \perp KI$. Vậy K thuộc đường tròn đường kính AI trong mặt phẳng (AKI) cố định nói trên. Đó chính là đường tròn cố định chứa điểm K.

– Đặt $\widehat{ABH} = \alpha$ thì $AH = AB\sin\alpha = 2R\sin\alpha$ $(AB = 2R)$.

Ta có tam giác AKI vuông tại K với cạnh huyền AI cố định, từ đó diện tích tam giác AKI đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi AKI là tam giác vuông cân, lúc đó $AK = \dfrac{AI}{\sqrt{2}}\cdot$

Mặt khác $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{4R^2\sin^2\alpha}$

hay $\dfrac{2}{AI^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{4R^2\sin^2\alpha}$ $(h = SA)$.

Vì AI là đường cao của tam giác vuông SAB nên

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{4R^2}\cdot$$

Vậy S_{AKI} đạt giá trị lớn nhất khi α thoả mãn điều kiện

$$\frac{2}{h^2}+\frac{2}{4R^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{4R^2\sin^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{h^2}+\frac{2}{4R^2}=\frac{1}{4R^2\sin^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4R^2+2h^2}{h^2}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\alpha=\frac{h}{\sqrt{4R^2+2h^2}}.$$

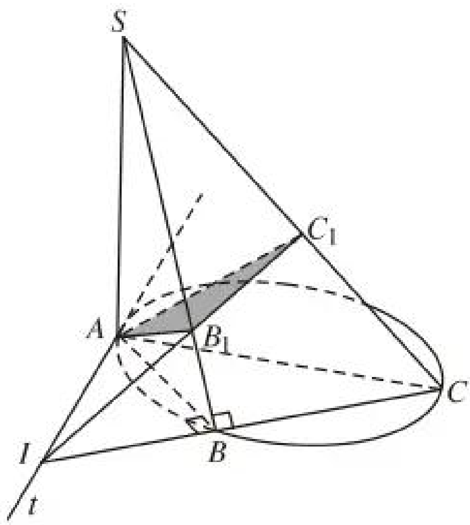
Như vậy, có hai vị trí của đường thẳng Δ để S_{AKI} đạt giá trị lớn nhất.

c) Ta có SH lớn nhất khi và chỉ khi AH lớn nhất, điều này xảy ra khi AH trùng với AB. Vậy nếu Δ trong (P) vuông góc với AB tại B thì SH đạt giá trị lớn nhất.

SH đạt giá trị bé nhất khi và chỉ khi AH đạt giá trị bé nhất, điều này xảy ra khi H trùng với điểm A, tức là Δ trùng với đường thẳng AB.

35. (h.163)

a) Dễ chứng minh được $SC \perp (AB_1C_1)$. Gọi At là giao tuyến của (ABC) và (AB_1C_1) thì $At \perp SC$. Mặt khác $SA \perp (ABC)$ nên $At \perp AC$. Vậy đường thẳng At cố định, đồng thời đường thẳng At là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



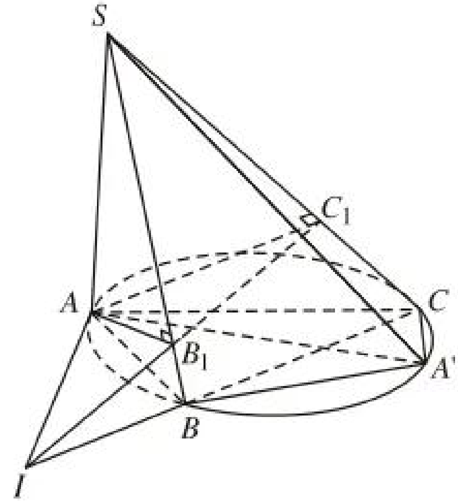
Hình 163

b) Kí hiệu I là giao điểm của At và đường thẳng BC thì I là điểm cố định, mặt khác các điểm I, B_1, C_1 thuộc cả hai mặt phẳng (AB_1C_1) và (SBC), do đó các điểm I, B_1, C_1 thẳng hàng, tức là đường thẳng B_1C_1 đi qua điểm cố định I khi S thay đổi trên đường thẳng kẻ từ A vuông góc với mp(ABC).

Cũng từ chứng minh trên ta có $\widehat{IAB}=\widehat{ICA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

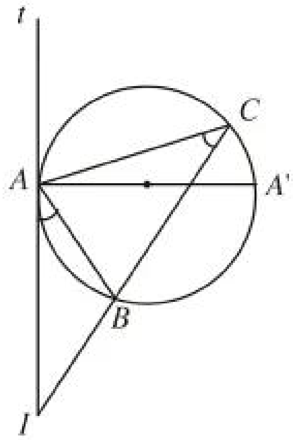
36. (h.164)

a) Ta có $SA^2 = SB.SB_1 = SC.SC_1$. Vậy bốn điểm B, C, B_1, C_1 thuộc một đường tròn. Nếu B_1C_1 và BC là hai đường thẳng song song thì suy ra BB_1C_1C là hình thang cân, từ đó SBC là tam giác cân tại S, điều đó dẫn đến ABC là tam giác cân tại A, mâu thuẫn với giả thiết, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

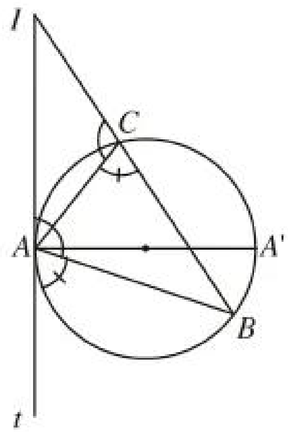


Hình 164

b) Gọi I là giao điểm của B_1C_1 và BC thì AI là giao tuyến của (ABC) và (AB_1C_1). Gọi AA' là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì ta chứng minh được $(AB_1C_1) \perp SA'$, từ đó $AI \perp AA'$. Như vậy, giao tuyến AI là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Hình 165



Hình 166

Nếu điểm B nằm giữa I và C (h.165) thì ta có $\widehat{IAB} = \widehat{ICA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$).

Nếu điểm C nằm giữa I và B (h. 166) thì ta có

$\widehat{BAt} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$) ;

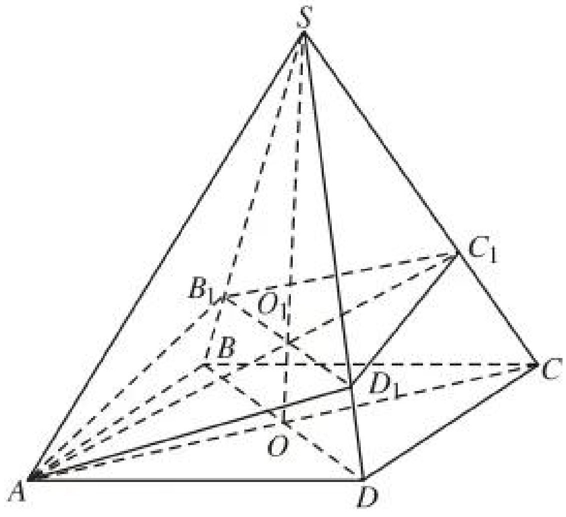
mặt khác $\widehat{IAB} + \widehat{BAt} = 180^o$

và $\widehat{ICA} + \widehat{ACB} = 180^o$.

Như vậy $\widehat{ICA} = \widehat{IAB}$.

37. (h.167)

Vì $(\alpha) \perp SC$ và $A \in (\alpha)$ nên $AC_1 \perp SC$. Mặt khác, gọi $B_1D_1 = (\alpha) \cap (SBD)$ thì B_1D_1



Hình 167

song song với BD và B_1D_1 qua O_1 với $O_1 = AC_1 \cap SO$ (do $BD \perp SC$, $(\alpha) \perp SC$ nên $BD \,//\, (\alpha)$).

Vì SAC là tam giác cân tại S và $AC_1 \perp SC$ nên C_1 thuộc SC khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^{\circ}$ tức là $\widehat{OSC} < 45^{\circ}$. Xét tam giác vuông SOC, điều kiện $\widehat{OSC} < 45^{\circ}$ tương đương với $SO > OC = \dfrac{AC}{2} = 2a$. Vậy để C_1 thuộc SC, C_1 không trùng với C và S thì hệ thức liên hệ giữa h và a là $h > 2a$.

Dễ thấy thiết diện của $S.ABCD$ khi cắt bởi (α) là tứ giác $AB_1C_1D_1$ có tính chất $AC_1 \perp B_1D_1$. Do đó $S_{AB_1C_1D_1} = \dfrac{1}{2}AC_1.B_1D_1$.

Ta có $\quad AC_1.SC = SO.AC \Rightarrow AC_1 = \dfrac{4ah}{\sqrt{4a^2+h^2}}$;

$$\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{SO_1}{SO},$$

mặt khác $\dfrac{O_1O}{CO} = \dfrac{AO}{SO} \Rightarrow O_1O = \dfrac{4a^2}{h} \Rightarrow SO_1 = \dfrac{h^2-4a^2}{h}$.

Từ đó $\quad \dfrac{B_1D_1}{BD} = \dfrac{h^2-4a^2}{h^2}$

hay $\quad B_1D_1 = \dfrac{2a(h^2-4a^2)}{h^2}$.

Vậy
$$S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4ah}{\sqrt{4a^2+h^2}}\cdot\frac{2a(h^2-4a^2)}{h^2} = \frac{4a^2(h^2-4a^2)}{h\sqrt{4a^2+h^2}}.$$

38. (h.168)

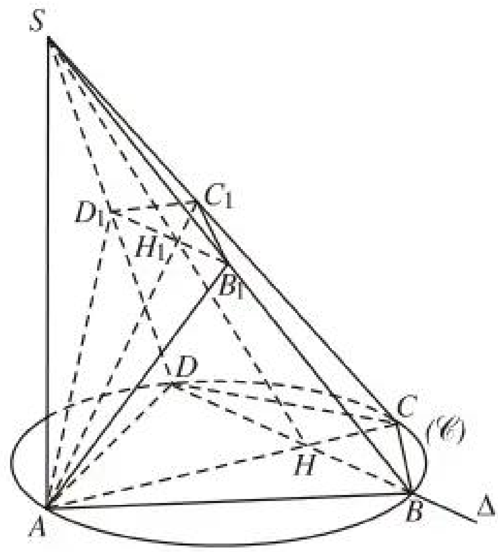
a) Vì (Q) qua A và $(Q) \perp SC$ nên $AB_1 \perp SC$.

Mặt khác dễ thấy $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AB_1$.

Vậy $AB_1 \perp mp(SBC)$, tức là $AB_1 \perp B_1C_1$.

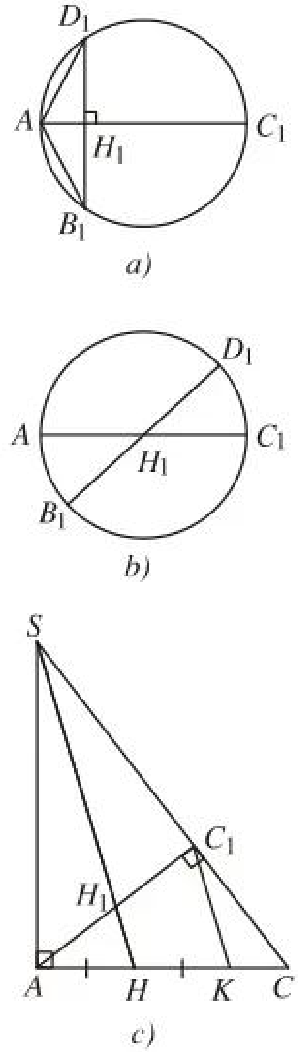
Tương tự như trên, ta có $AD_1 \perp D_1C_1$.

Do đó, tứ giác $AB_1C_1D_1$ nội tiếp đường tròn.



Hình 168

b) Do tứ giác $AB_1C_1D_1$ nội tiếp đường tròn đường kính AC_1 mà AC_1 cắt B_1D_1, tại H_1 nên H_1 là trung điểm của B_1D_1, khi đó xảy ra một trong hai trường hợp sau :



Hình 169

– *Trường hợp 1.* $B_1D_1 \perp AC_1$ tại H_1 (h.169a).

– *Trường hợp 2.* B_1D_1 qua trung điểm H_1 của AC_1 (h.169b).

Xét trường hợp 1

Vì $B_1D_1 \perp AC_1$ nên $AB_1 = AD_1$.

Mặt khác AB_1, AD_1 là hai đường cao của hai tam giác vuông SAB và SAD nên

$$AB_1 = AD_1 \Leftrightarrow AB = AD$$

(vì $\dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AB_1^2}$ và $\dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{AD_1^2}$).

Lại có AC là đường kính của $(\mathscr{C})$ nên

$$AB = AD \Leftrightarrow BD \perp AC.$$

Vậy nếu đường thẳng Δ vuông góc với AC tại H mà $0 < AH < AC$ thì H_1 là trung điểm của B_1D_1.

Xét trường hợp 2 (h.169c)

Kẻ $C_1K \parallel H_1H$, do H_1 là trung điểm của AC_1 nên $AH = HK = x$, từ đó $CK = 2R - 2x$. Khi đó

$$\frac{2R-2x}{2R-x} = \frac{CK}{CH} = \frac{CC_1}{CS} = \frac{CC_1.CS}{CS^2} = \frac{AC^2}{CS^2} = \frac{4R^2}{h^2+4R^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (R-x)(h^2+4R^2) = 2R^2(2R-x)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{Rh^2}{h^2+2R^2}.$$

Dễ thấy $0 < x < 2R$.

Vậy nếu đường thẳng Δ quay quanh điểm H mà H được xác định bởi

$$AH = x = \frac{Rh^2}{h^2+2R^2}, H \in AC$$

thì H_1 là trung điểm của B_1D_1.

c) Bạn đọc tự giải.

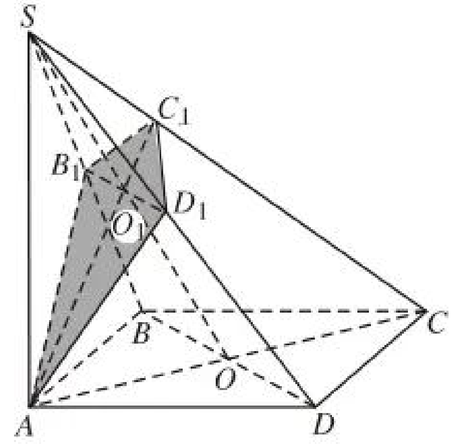
39. (h.170)

a) Dễ dàng thấy SAB, SAD là các tam giác vuông tại A.

Mặt khác $SA \perp (ABCD)$, $AD \perp DC$

nên $SD \perp DC$ (định lí ba đường vuông góc), do đó SDC là tam giác vuông tại D.

Tương tự, SBC là tam giác vuông tại B.



Hình 170

b) Dễ dàng chứng minh được

$$AD_1 \perp (SCD)$$

$$\Rightarrow \quad AD_1 \perp SC.$$

Cũng như vậy, ta có $AB_1 \perp SC$.

Vậy $\quad SC \perp (AB_1D_1)$.

Gọi $O = AC \cap BD$, $O_1 = B_1D_1 \cap SO$ thì $C_1 = AO_1 \cap SC$.

Mặt khác $\quad \Delta SAB = \Delta SAD$ (c.g.c) nên $B_1D_1 \,//\, BD$.

Ta lại có $\quad BD \perp (SAC)$

$$\Rightarrow \quad B_1D_1 \perp (SAC) \Rightarrow B_1D_1 \perp AC_1.$$

Từ đó $\quad S_{AB_1C_1D_1} = \dfrac{1}{2} AC_1.B_1D_1.$

Ta có $\quad AC_1 = \dfrac{SA.AC}{SC} = \dfrac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.$

$$\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SB_1.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{a^2}{2a^2}$$

$$\Rightarrow \quad B_1D_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

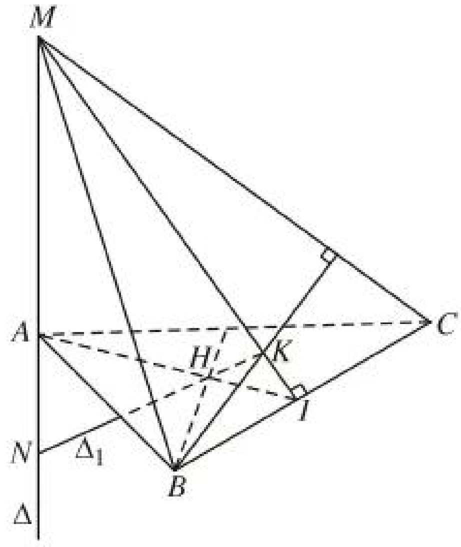
(*Chú ý*. Có thể thấy B_1, D_1 thứ tự là trung điểm của SB và SD nên $B_1D_1 \,//\, BD$ và $B_1D_1 = \dfrac{1}{2}BD$).

Vậy $\quad S_{AB_1C_1D_1} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}.$

40. (h.171)

a) Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$, $MI \perp BC$. Vậy K thuộc MI. Ta cũng có $BC \perp (MAI)$. Do Δ_1 đi qua K và $\Delta_1 \perp (MBC)$ nên $\Delta_1 \perp BC$. Vậy Δ_1 nằm trong mp(MAI). Gọi giao điểm của Δ_1 với AI là H thì $HK \perp MC$, mặt khác $BK \perp MC$, từ đó MC vuông góc với (BHK) hay $MC \perp BH$.

Từ $\Delta \perp (ABC)$, $BH \perp MC$ nên $BH \perp AC$. Vậy H là trực tâm của tam giác ABC. Điều này chứng tỏ khi M thay đổi trên Δ thì Δ_1 đi qua điểm cố định là trực tâm H của tam giác ABC.



Hình 171

b) Vì Δ_1 là đường thẳng HK nên Δ_1 cắt Δ tại điểm N.

Theo câu a), ta có MC vuông góc với (BHK) mà BN thuộc mặt phẳng này, vậy NB vuông góc với MC.

Tương tự như trên, ta cũng có $MB \perp NC$.

Từ $\Delta AHN \backsim \Delta AMI$, ta có $\dfrac{AH}{AM} = \dfrac{AN}{AI} \Rightarrow AH.AI = AM.AN$.

Mặt khác $\qquad AH.AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2}{2}$

do đó $\qquad AM.AN = \dfrac{a^2}{2}\cdot$

Ta có $\qquad MN = AM + AN.$

Vậy MN ngắn nhất khi và chỉ khi $AM = AN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot$

Hệ thức này xác định điểm M để MN có độ dài ngắn nhất.

41. (h.172)

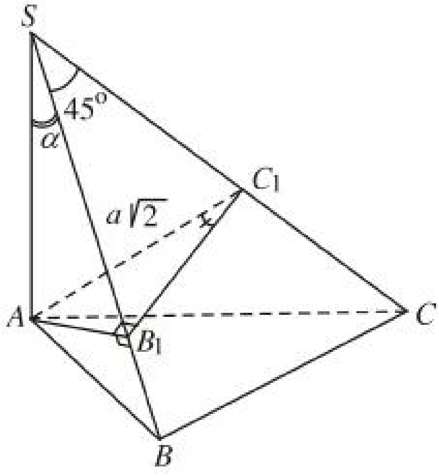
a) Vì $(ABC) \perp (SAB)$

$(SBC) \perp (SAB)$

mà $BC = (ABC) \cap (SBC)$ nên

$BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Như vậy, tứ diện $SABC$ có $\widehat{SAC} = 90^o$ và $\widehat{SBC} = 90^o$ nên điểm cách đều S, A, B, C là trung điểm của SC.



Hình 172

Chú ý. Có thể chứng minh $BC \perp SB$ như sau :

Kẻ $AB_1 \perp SB$, do $(SAB) \perp (SBC)$ nên $AB_1 \perp (SBC)$

$\Rightarrow$ $AB_1 \perp BC$,

mặt khác $BC \perp SA$

$\Rightarrow$ $BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow$ $BC \perp SB$.

b) Kẻ $AB_1 \perp SB$, $AC_1 \perp SC$, dễ chứng minh được

$AB_1 \perp (SBC)$ và

$(AB_1C_1) \perp SC.$

Từ đó $\widehat{AC_1B_1}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SCA) và (SCB).

Xét ΔAB_1C_1 ta có $AB_1 = B_1C_1\tan 60^o$

mà $AB_1 = SB_1\tan\alpha$, $B_1C_1 = SB_1\sin 45^o$.

Vậy hai mặt phẳng (SCA) và (SCB) tạo với nhau góc 60^o khi và chỉ khi

$$SB_1\tan\alpha = SB_1.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Hệ thức này xác định α.

42. (h.173)

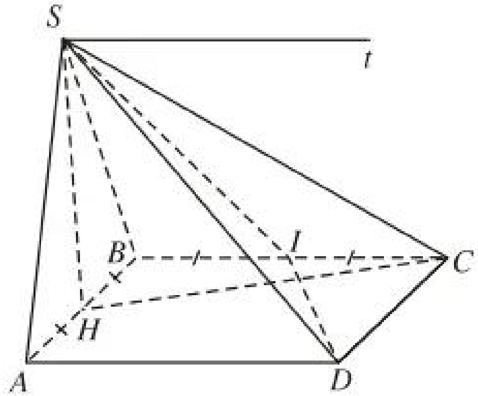
a) Gọi H là trung điểm của AB thì

$SH \perp AB.$

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ nên

$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AD,$

mặt khác $AD \perp AB$.



Hình 173

Vậy $\quad AD \perp (SAB)$.

Từ đó $\quad (SAD) \perp (SAB)$.

Tương tự như trên, ta có

$$(SBC) \perp (SAB).$$

b) Giả sử $(SAD) \cap (SBC) = St$, dễ thấy $St \parallel AD$, từ đó mp$(ASB) \perp St$. Do $\widehat{ASB} = 60^o$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng 60^o.

c) Vì $ABCD$ là hình vuông ; H, I lần lượt là trung điểm của AB và BC nên $HC \perp DI$, mặt khác $DI \perp SH$. Vậy $DI \perp (SHC)$, từ đó $(SDI) \perp (SHC)$.

43. (h.174)

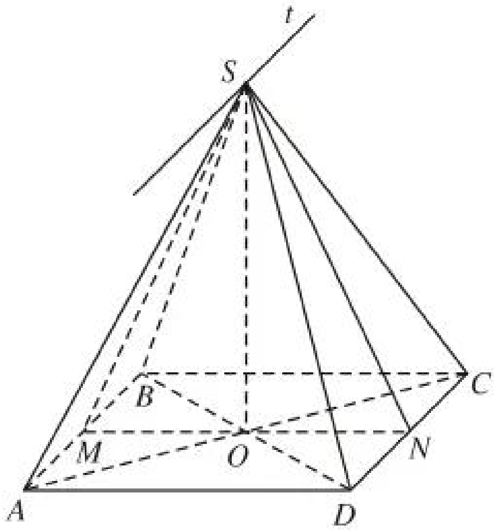
a) Vì $MN \perp AB$, $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SMN)$ $\Rightarrow (SAB) \perp (SMN)$. Vậy góc giữa (SMN) và (SAB) bằng 90^o.

Tương tự như trên, góc giữa (SMN) và (SCD) cũng bằng 90^o.

Như vậy với $AB = a$, $BC = 2a$, h tuỳ ý thì (SMN) vuông góc cả với hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Dễ thấy $(SAB) \cap (SCD) = St$, $St \parallel AB$.

Như vậy $St \perp (SMN)$, từ đó $\widehat{MSN}$ hoặc $180^o - \widehat{MSN}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).



Hình 174

Tính $\widehat{MSN}$.

Ta có $\quad SM^2 = SN^2 = h^2 + a^2$

$$MN^2 = SM^2 + SN^2 - 2SM.SN\cos\widehat{MSN}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^2 = h^2 + a^2 + h^2 + a^2 - 2(h^2 + a^2)\cos\widehat{MSN}$$

tức là $\quad \cos\widehat{MSN} = \dfrac{2h^2 - 2a^2}{2(h^2 + a^2)} = \dfrac{h^2 - a^2}{h^2 + a^2}$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là α mà $\cos\alpha = \left|\dfrac{h^2 - a^2}{h^2 + a^2}\right|$.

Từ đó hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc khi và chỉ khi $h = a$.

44. (h.175)

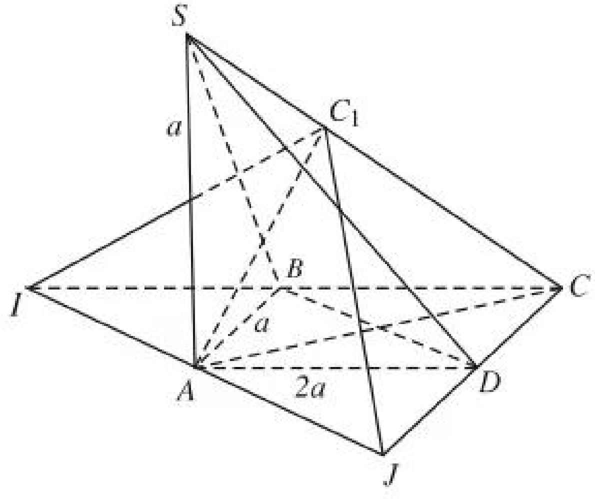
a) Dễ thấy

$(SAB) \perp (ABCD)$

$(SAD) \perp (ABCD)$

nên góc giữa mặt bên (SAB) và (SAD) với mp$(ABCD)$ bằng 90^o.

Ta có $(SDA) \perp CD$ và SDA là tam giác vuông tại A nên $\widehat{SDA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và $(ABCD)$.



Hình 175

Từ đó $\quad \tan\widehat{SDA} = \dfrac{1}{2}$.

Tương tự, $\tan\widehat{SBA} = 1 \Leftrightarrow \widehat{SBA} = 45^o$.

Vậy mp(SCD) tạo với mp$(ABCD)$ góc bằng φ mà $\tan\varphi = \dfrac{1}{2}$ và mp(SBC) tạo với mp$(ABCD)$ góc 45^o.

b) Vì $(SAD) \perp (SAB)$ nên góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 90^o.

Ta cũng có $CD \perp (SAD)$ nên $(SCD) \perp (SAD)$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng 90^o. Tương tự, ta cũng có góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 90^o.

Ta cần phải tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC).

Trong mp$(ABCD)$, kẻ qua A đường thẳng vuông góc với AC, nó cắt hai đường thẳng BC và DC lần lượt tại I và J, thì $IJ \perp SC$.

Trong mp(SAC) kẻ $AC_1 \perp SC$ thì $(IJC_1) \perp SC$.

Do đó, $\widehat{IC_1J}$ hoặc $180^o - \widehat{IC_1J}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Ta có $\quad AJ = AC\tan\widehat{ACD} = 2a\sqrt{5}$.

$$\frac{1}{AC_1^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{5a^2} = \frac{6}{5a^2}$$

$$\Rightarrow \quad AC_1 = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

Đặt $\widehat{AC_1J} = \alpha$ thì $\tan\alpha = \dfrac{AJ}{AC_1} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}} = 2\sqrt{6}$.

Đặt $\widehat{AC_1I} = \beta$ thì $\tan\beta = \dfrac{AI}{AC_1} = \dfrac{AC\tan\widehat{ACI}}{AC_1} = \dfrac{a\sqrt{5}.\frac{1}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Đặt $\widehat{IC_1J} = \varphi$ thì $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{6} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}}{1 - 2\sqrt{6}.\dfrac{\sqrt{6}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

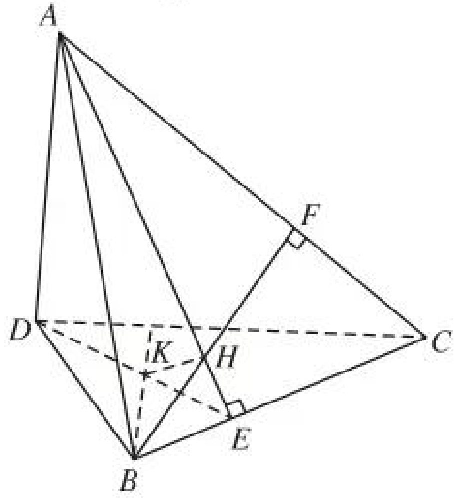
Vậy góc giữa mp(SBC) và (SCD) là $180^o - \varphi$ mà $\tan\varphi = \dfrac{-\sqrt{6}}{2}$.

45. (h.176)

a) Vì $AD \perp (DBC)$ nên $AD \perp BC$.

Mặt khác $AE \perp BC$. Vậy $BC \perp (ADE)$, từ đó ta có $(ABC) \perp (ADE)$.

Vì K là trực tâm tam giác DBC nên $BK \perp DC$. Theo giả thiết $AD \perp (DBC)$, vậy $BK \perp AC$ (định lí ba đường vuông góc). Kết hợp với $BF \perp AC$ ta có $AC \perp (BFK)$, từ đó mp(ABC) $\perp$ mp(BFK).



Hình 176

b) Từ câu a), ta có mp(BFK) $\perp$ mp(ABC)

mp(ADE) $\perp$ mp(ABC)

HK = mp(ADE) $\cap$ mp(BFK).

Vậy $HK \perp$ mp(ABC).

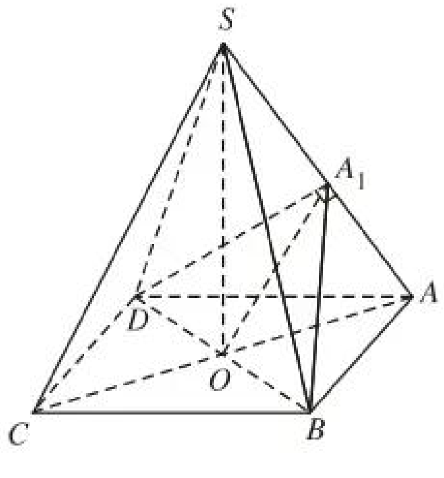
46. (h.177)

a) Ta có $AC^2 + BD^2 = 4a^2$, $AC = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$

nên $BD^2 = \dfrac{4a^2}{3} \Rightarrow OB^2 = \dfrac{a^2}{3}$.

Xét tam giác vuông SOB, ta có

$SO^2 = SB^2 - OB^2 = \dfrac{2a^2}{3} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Hình 177

Vậy tam giác SAC có trung tuyến SO bằng nửa AC nên SAC là tam giác vuông tại S.

b) Trong mặt phẳng (SOA) kẻ OA_1 vuông góc với SA thì $SA \perp mp(A_1BD)$, từ đó $\widehat{BA_1D}$ hoặc $180^o - \widehat{BA_1D}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Ta có $OA_1 = \dfrac{OA.OS}{SA} = \dfrac{OA.OS}{\sqrt{OA^2 + OS^2}}$

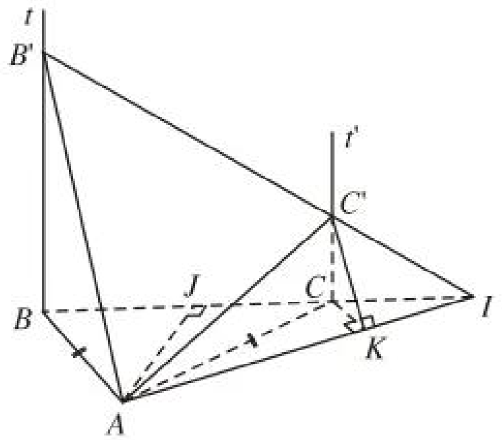
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}.\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Mặt khác $BD = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, từ đó $\widehat{BA_1D} = 90^o$ hay hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc.

47. (h.178)

a) Vì $BB' = 3CC'$ nên đường thẳng $B'C'$ cắt BC tại điểm I thì $BI = \dfrac{3}{2}BC$.

Như vậy I là điểm cố định, mặt khác giao tuyến của $mp(AB'C')$ và $mp(ABC)$ là AI. Như vậy, khi B', C' thay đổi thì giao tuyến của $mp(AB'C')$ và $mp(ABC)$ là đường thẳng AI cố định.



Hình 178

b) Khi $BB' = a$ thì $CC' = \dfrac{a}{3}$. Dễ thấy $BC = a\sqrt{3}$. Do $CI = \dfrac{1}{2}BC$

nên $\quad CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\quad AJ = \dfrac{a}{2}$ $(AJ \perp BC, J \in BC)$ và $IJ = a\sqrt{3}$.

Kẻ $CK \perp AI$, do $C'C \perp (ABC)$ nên $C'K \perp AI$.

Vậy $\widehat{CKC'}$ là góc giữa $mp(AB'C')$ và $mp(ABC)$.

Ta có $\quad \dfrac{CK}{AJ} = \dfrac{CI}{AI}$;

$$AI^2 = AJ^2 + JI^2 = \frac{a^2}{4} + 3a^2 = \frac{13a^2}{4} \text{ nên } AI = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

Từ đó $\qquad CK = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{a\sqrt{13}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$.

Đặt $\widehat{CKC'} = \varphi$ thì $\tan\varphi = \dfrac{CC'}{CK} = \dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{13}}{a\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{39}}{9}$.

Như thế góc giữa mp($AB'C'$) và mp(ABC) là φ mà $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{39}}{9}$.

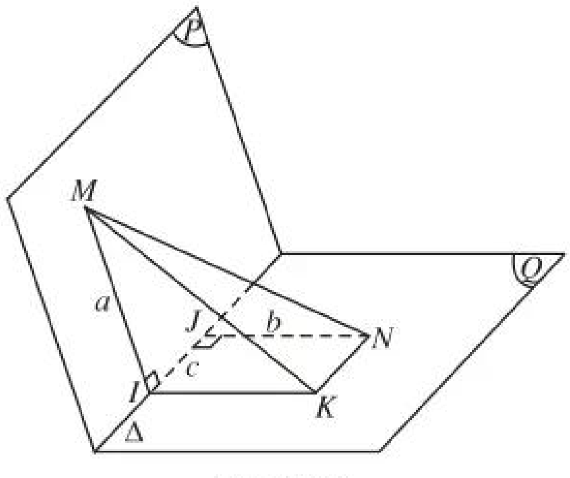
Tam giác $AB'C'$ có hình chiếu trên mp(ABC) là tam giác ABC mà $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $\qquad S_{AB'C'} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos\varphi} = \dfrac{a^2\sqrt{79}}{12}$.

(Tính $\cos\varphi$ nhờ $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{39}}{9}$ được $\cos\varphi = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$).

48. (h.179)

Trong mp(Q), kẻ qua I đường thẳng song song với JN và kẻ qua N đường thẳng song song với IJ, chúng cắt nhau tại K.



Hình 179

Dễ thấy $MI \perp NK$, tứ giác $IJNK$ là hình chữ nhật.

Như vậy $MI \perp NK$, $IK \perp KN$, từ đó $MK \perp KN$, ngoài ra $IK = b$, $NK = c$.

Vì MI và IK cũng vuông góc với IJ.

Vậy $\widehat{MIK}$ hoặc $180^\circ - \widehat{MIK}$ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

Ta có

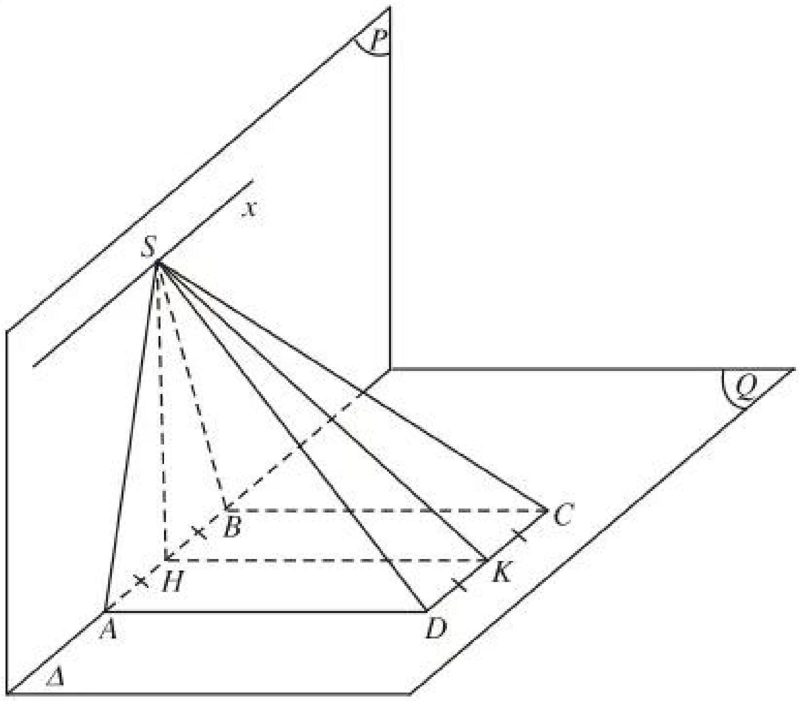
$$MN^2 = MK^2 + KN^2 = MK^2 + c^2;$$

$$MK^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{MIK}.$$

Vậy $\qquad MN = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{MIK} + c^2}$

hoặc $\qquad MN = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\widehat{MIK} + c^2}$.

49. a) (h.180)



Hình 180

Dễ thấy mp(SCD) cắt (P) theo giao tuyến Sx, $Sx \parallel AB$.

Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $Sx \perp$ mp(SHK) và tam giác SHK vuông tại H. Suy ra $\widehat{HSK}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (P). Ta có

$$\tan\widehat{HSK} = \frac{HK}{HS} = \frac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy nếu gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (P) thì φ là góc thoả mãn

$$\tan\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Tương tự như trên thì $\widehat{HKS}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (Q).

Ta có $$\tan\widehat{HKS} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

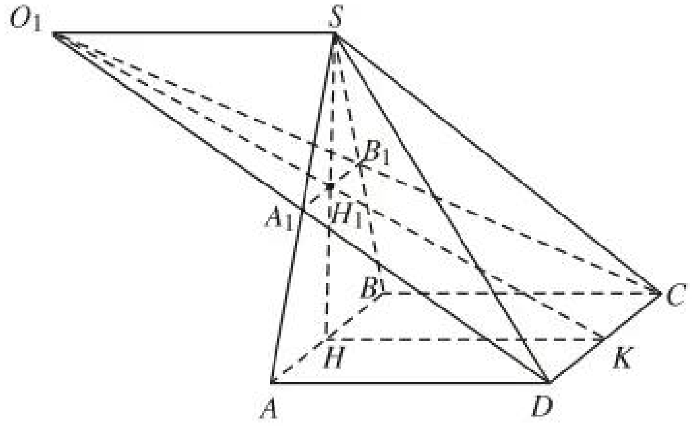
b) (h.181)

Dễ thấy ba điểm O_1, H_1, K thẳng hàng (do H_1 là giao điểm của SH với A_1B_1) và $H_1O_1 = H_1K$. Mặt khác $H_1S = H_1H$. Suy ra $O_1S \,//\, HK$.

Do $HK \perp AB$ và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $HK \perp (SAB)$.

Vậy $O_1S \perp (SAB)$, từ đó $O_1S \perp AB$ và $O_1S \perp SA$.

Vì $AB \,//\, CD$, từ đó $O_1S \perp SA$ và $O_1S \perp CD$.



Hình 181

Góc giữa hai mặt phẳng $(A_1B_1O_1)$ và (Q) chính là $\widehat{H_1KH}$.

$$\tan\widehat{H_1KH} = \frac{HH_1}{HK} = \frac{a\sqrt{3}}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Góc giữa hai mặt phẳng (A_1B_1O) và (P) chính là $\widehat{HH_1K}$.

Ta có $$\tan\widehat{HH_1K} = \frac{HK}{HH_1} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

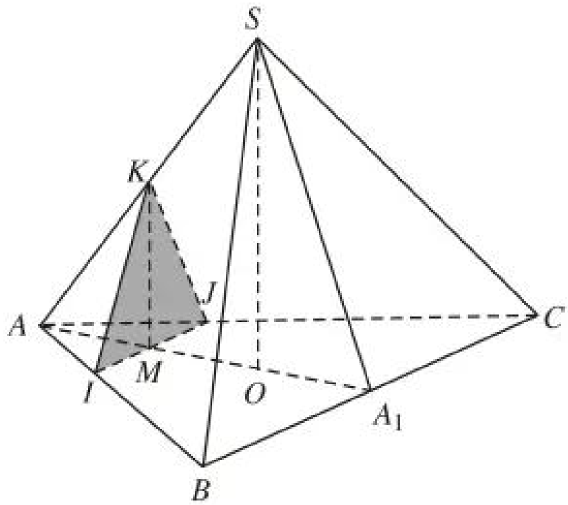
50. a) Vì $SO \perp AA_1$, $BC \perp AA_1$, $(P) \perp AA_1$ và (P) qua M nên (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và song song với SO, BC.

Trường hợp $x = 0$, thiết diện là điểm A.

Trường hợp $0 < x \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (h.182).

$(P) \cap (ABC) = IJ$, IJ đi qua điểm M và $IJ \,//\, BC$.

$(P) \cap (SAO) = MK$, $MK \,//\, SO$.



Hình 182

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi (P) là tam giác IKJ. Dễ thấy IKJ là tam giác cân tại K.

Trường hợp $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (h.183).

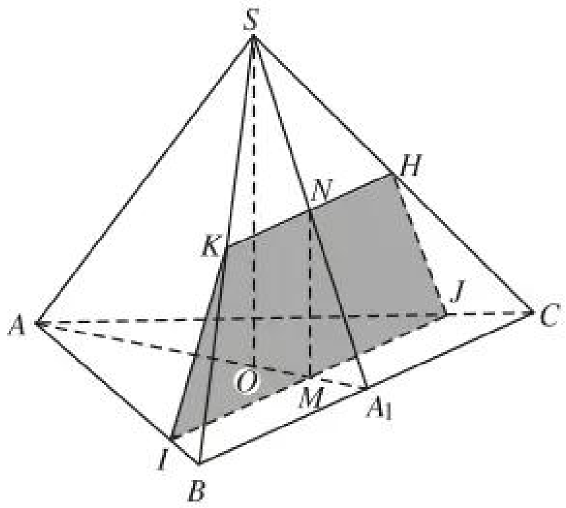
$(P) \cap (ABC) = IJ$, IJ đi qua M và $IJ \parallel BC$

$(P) \cap (SOA_1) = MN$, $MN \parallel SO$

$(P) \cap (SBC) = HK$, HK đi qua N và $HK \parallel BC$.

Vậy thiết diện thu được là hình thang $IJHK$.

Mặt khác M, N lần lượt là trung điểm của IJ, HK ; $MN \parallel SO$; $SO \perp (ABC)$ nên $MN \perp IJ$. Vậy tứ giác $IJHK$ là hình thang cân.



Hình 183

Trường hợp $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, thiết diện là đoạn thẳng BC.

b) *Trường hợp* $0 \leq x \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$S_{IJK} = \frac{1}{2} IJ.MK.$$

$$\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA_1} \Rightarrow IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3} \;;$$

$$\frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO} \Rightarrow MK = 2x\sqrt{3}\,.$$

Vậy $S_{IJK} = 2x^2$.

Trường hợp $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$S_{IJHK} = \frac{1}{2}(IJ + HK).MN.$$

Ta có $$IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{HK}{BC} = \frac{SN}{SA_1} = \frac{OM}{OA_1} \Rightarrow HK = 2(x\sqrt{3} - a)\ ;$$

$$\frac{MN}{SO} = \frac{MA_1}{A_1O} \Rightarrow MN = 2(3a - 2x\sqrt{3}).$$

Vậy $S_{IJHK} = \frac{2}{3}(4x\sqrt{3} - 3a)(3a - 2x\sqrt{3})$.

Dễ thấy khi $0 < x \le \frac{a\sqrt{3}}{3}$ thì diện tích thiết diện lớn nhất khi và chỉ khi $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Lúc đó diện tích thiết diện bằng $\frac{2a^2}{3}$.

Khi $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$ thì diện tích thiết diện là :

$$S_{IJHK} = \frac{1}{3}(4x\sqrt{3} - 3a)(6a - 4x\sqrt{3}).$$

Từ đó, suy ra diện tích thiết diện lớn nhất khi và chỉ khi $x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$.

Lúc đó diện tích thiết diện bằng $\frac{3a^2}{4}$.

Vậy khi M thay đổi trên AA_1 thì diện tích thiết diện lớn nhất bằng $\frac{3a^2}{4}$, lúc đó M được xác định bởi

$$AM = x = \frac{3a\sqrt{3}}{8} \text{ hay } \frac{AM}{AA_1} = \frac{3}{4}.$$

51. (h.184)

a) Vì $(SEF) \perp (ABCD)$

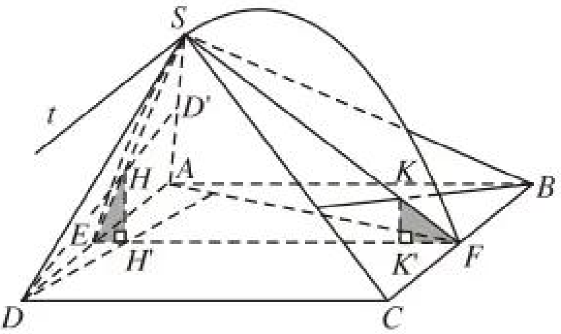
và $AD \perp EF$

nên $AD \perp (SEF)$.

Từ đó $(SEF \perp (SAD)$.

Tương tự $(SEF \perp (SBC)$.

Dễ thấy $(SAD) \cap (SBC) = St$, $St \,//\, AD$.



Hình 184

Do $AD \perp (SEF)$, từ đó $St \perp (SEF)$, tức là $\widehat{ESF}$ hoặc $180^o - \widehat{ESF}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Vì S thuộc đường tròn đường kính EF nên $\widehat{ESF} = 90^o$.

Vậy $(SAD) \perp (SBC)$.

b) Kẻ $DD' \perp SA$.

Do $SF \perp (SAD) \Rightarrow SF \perp DD'$

$$\Rightarrow DD' \perp (SAF) \Rightarrow DD' \perp AF.$$

Mặt khác $HH' \perp (ABCD)$ nên $DH' \perp AF$ (định lí ba đường vuông góc).

Ta lại có H' thuộc EF. Vậy H' là trực tâm tam giác ADF, từ đó H' cố định.

Tương tự K' cũng là điểm cố định.

Ta có $\Delta HH'E \backsim \Delta FK'K$, do đó

$$\frac{HH'}{K'F} = \frac{H'E}{K'K} \Rightarrow HH'.KK' = H'E.K'F.$$

Như vậy $HH'.KK'$ không đổi.

Chú ý. Có thể tính $HH'.KK'$ qua a, b.

Thật vậy, $\Delta EDH' \backsim \Delta EFA \Rightarrow \dfrac{EH'}{EA} = \dfrac{DE}{FE} \Rightarrow EH' = \dfrac{a^2}{4b}\cdot$

Tương tự, ta cũng có $FK' = \dfrac{a^2}{4b}\cdot$

Vậy $HH'.KK' = \dfrac{a^4}{16b^2}$ không đổi.

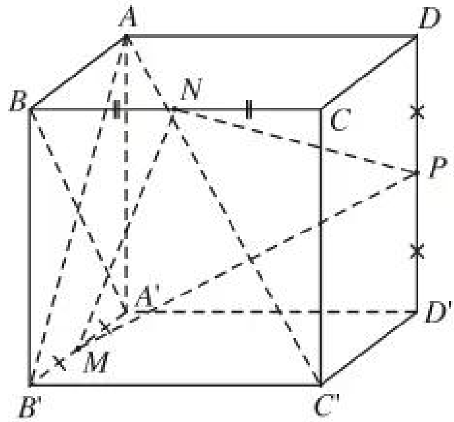
52. (h.185)

a) Ta có $C'B' \perp (ABB'A')$, $B'A \perp A'B$ nên $A'B \perp AC'$ (định lí ba đường vuông góc). Vậy góc giữa AC' và $A'B$ bằng 90^o.

b) Ta có

$$NP^2 = NC^2 + CD^2 + DP^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{2}\cdot$$

Tương tự, ta cũng có $MN^2 = MP^2 = \dfrac{3a^2}{2}\cdot$



Hình 185

Vậy MNP là tam giác đều.

Mặt khác $AN^2 = AP^2 = AM^2 = \dfrac{5a^2}{4}$;

$$C'N^2 = C'P^2 = C'M^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

Từ đó $AC' \perp (MNP)$.

53. (h.186)

a) Vì $AC \,//\, A'C'$ nên góc giữa AC và BC' bằng góc giữa $A'C'$ và BC'.

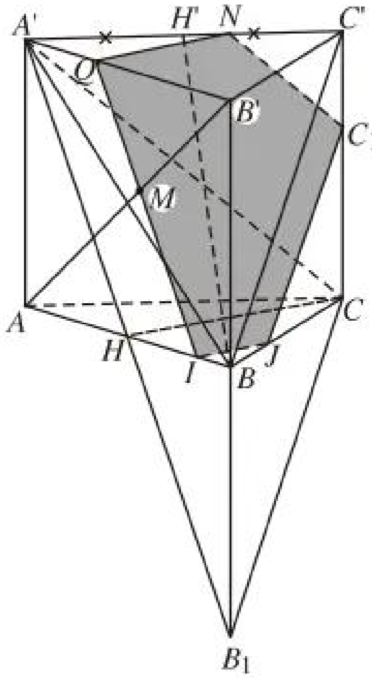
Gọi H' là trung điểm của $A'C'$, do $BA' = BC'$ nên $\widehat{BH'C'} = 90^\circ$. Vậy $\widehat{H'C'B}$ là góc giữa hai đường thẳng AC và BC'. Đặt $\widehat{H'C'B} = \alpha$ thì

$$\cos\alpha = \frac{H'C'}{BC'} = \frac{a}{2\sqrt{h^2 + a^2}}.$$

Vậy góc giữa AC và BC' là α mà

$$\cos\alpha = \frac{a}{2\sqrt{h^2 + a^2}}.$$

b) Lấy B_1 thuộc $B'B$ sao cho $BB' = BB_1$, khi đó $CB_1 \,//\, C'B$. Vậy mp(P) đi qua M, song song với BC' và $A'C$ chính là mặt phẳng đi qua điểm M và song song với mp($A'CB_1$).



Hình 186

Dễ thấy mp($A'CB_1$) cắt hình lăng trụ đã cho theo thiết diện là $A'HC$ còn (P) cắt hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo thiết diện IJC_1NQ, trong đó IQ là đường thẳng đi qua điểm M và song song với $A'H$, còn $IJ \,//\, HC$, $JC_1 \,//\, BC'$, $C_1N \,//\, A'C$.

Ta có $\dfrac{C_1C}{C_1C'} = \dfrac{CJ}{BJ} = \dfrac{HI}{IB}$.

Đặt $HI = x$. Do $\dfrac{MA}{MB'} = \dfrac{5}{4}$ nên $\dfrac{AI}{B'Q} = \dfrac{5}{4}$

hay $\dfrac{\frac{a}{2} + x}{a - x} = \dfrac{5}{4}$

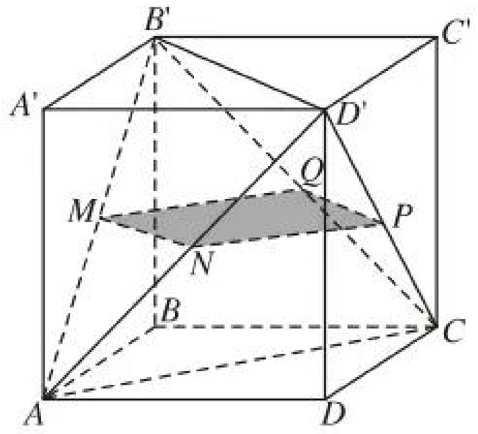
$$\Rightarrow \quad 2a + 4x = 5a - 5x \Rightarrow x = \frac{a}{3}.$$

Khi đó $\quad IB = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{3} = \dfrac{a}{6}\cdot$

Vậy $\quad \dfrac{C_1C}{C_1C'} = \dfrac{\dfrac{a}{3}}{\dfrac{a}{6}} = 2.$

54. (h.187)

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $AB'CD'$ là tứ diện đều có cạnh $a\sqrt{2}$ (a là cạnh của hình lập phương). Dễ thấy thiết diện là tứ giác $MNPQ$, trong đó M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB', AD', $D'C$, $B'C$. Do $AB'CD'$ là tứ diện đều nên $B'D' \perp AC$.



Hình 187

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình vuông cạnh bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot$ Từ đó $S_{MNPQ} = \dfrac{a^2}{2}\cdot$

Chú ý. Có thể chiếu tứ giác $MNPQ$ xuống mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương chiếu $A'A$ được tứ giác $M_1N_1P_1Q_1$ trong đó M_1, N_1, P_1, Q_1 lần lượt là trung điểm của AB, AD, CD, BC và

$$S_{MNPQ} = S_{M_1N_1P_1Q_1} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{a^2}{2}\cdot$$

Nếu hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ được thay bởi hình hộp chữ nhật với $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$ thì thiết diện thu được vẫn là tứ giác $MNPQ$ và $MNPQ$ là hình thoi có độ dài hai đường chéo MP và NQ lần lượt là b, a. Do đó

$$S_{MNPQ} = \frac{ab}{2}\cdot$$

Chú ý. Thực hiện như phần chú ý ở trên thì

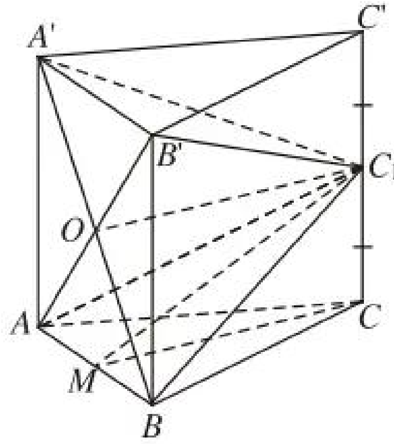
$$S_{MNPQ} = S_{M_1N_1P_1Q_1} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{ab}{2}\cdot$$

55. (h.188)

a) Vì AB // $A'B'$ nên góc giữa C_1B và $A'B'$ là góc giữa C_1B và AB. Dễ thấy $AC_1 = BC_1$ nên AC_1B là tam giác cân. Từ đó $\widehat{ABC_1} < 90^o$. Vậy góc giữa AB và BC_1 là $\widehat{ABC_1}$. Gọi M là trung điểm của AB thì

$$MB = \frac{a}{2},\ BC_1 = \frac{a\sqrt{5}}{2},\ MB \perp MC_1.$$

Từ đó $\cos\widehat{C_1BA} = \dfrac{MB}{C_1B} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.



Hình 188

Cũng từ kết quả trên, ta có $(C_1MC) \perp AB$ và C_1MC là tam giác vuông tại C nên góc giữa mp(C_1AB) và (CAB) là $\widehat{C_1MC}$.

Ta có $$\tan\widehat{C_1MC} = \frac{C_1C}{MC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $\widehat{C_1MC} = 30^o$ hay góc giữa mp(C_1AB) và mp(ABC) bằng 30^o.

b) $ABB'A'$ là hình vuông. Dễ thấy $C_1A = C_1B = C_1A' = C_1B' = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó $C_1O \perp AB'$, $C_1O \perp A'B$ $(O = A'B \cap AB')$.

Vậy $C_1.ABB'A'$ là hình chóp tứ giác đều.

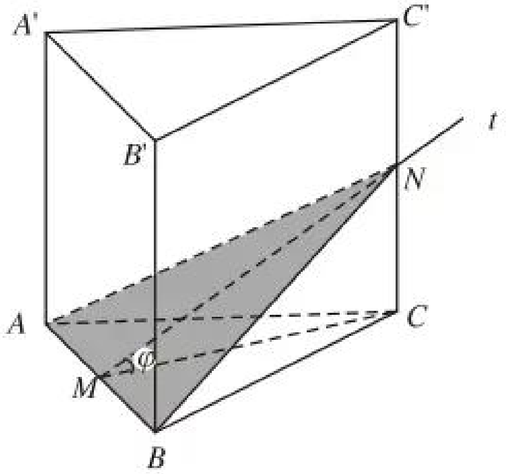
c) Trong mp(M, CC') kẻ tia Mt sao cho $\widehat{CMt} = \varphi$ thì mp(AB, Mt) chính là mặt phẳng (P) phải tìm.

– Nếu $0^o \leq \varphi \leq \widehat{C'MC}$ thì thiết diện là tam giác ABN (h.189).

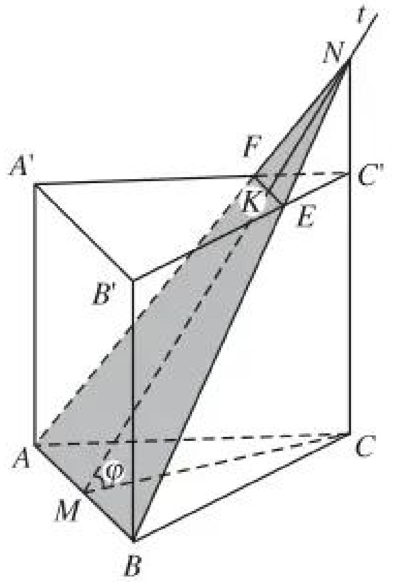
Khi đó $S_{ABN} = \dfrac{1}{2}AB.MN$

$$AB = a,\ MN = \frac{MC}{\cos\varphi} = \frac{a\sqrt{3}}{2\cos\varphi}.$$

Vậy $S_{ABN} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$.



Hình 189



Hình 190

– Nếu $\widehat{C'MC} < \varphi < 90^{\circ}$ thì thiết diện là hình thang cân $ABEF$ (h.190).

Khi đó $\quad S_{ABEF} = S_{ABN} - S_{EFN}$.

Ta có $\quad S_{ABN} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$

$$\frac{S_{EFN}}{S_{ABN}} = \left(\frac{NE}{NB}\right)^2 = \left(\frac{NC'}{NC}\right)^2 = \frac{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\tan\varphi - a\right)^2}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\tan\varphi\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{3}\tan\varphi - 2\right)^2}{3\tan^2\varphi}.$$

Vậy $S_{EFN} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}\cdot\dfrac{(\sqrt{3}\tan\varphi - 2)^2}{3\tan^2\varphi}$.

Từ đó $S_{ABEF} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4.\cos\varphi}.\left[1 - \dfrac{\left(\sqrt{3}\tan\varphi - 2\right)^2}{3\tan^2\varphi}\right]$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{12\tan^2\varphi\cos\varphi}.\left(4\sqrt{3}\tan\varphi - 4\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{3\tan\varphi.\sin\varphi}\left(\sqrt{3}\tan\varphi - 1\right).$$

– Nếu $\varphi = 90^{\circ}$ thì thiết diện là hình vuông $ABB'A'$. Khi đó diện tích thiết diện bằng a^2.