§2, §3, §4. Hai đường thẳng vuông góc. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Hai mặt phẳng vuông góc

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. a) *Góc giữa hai đường thẳng* Δ_1 *và* Δ_2 *là góc giữa hai đường thẳng* a_1 *và* a_2 *cùng đi qua một điểm, lần lượt song song (hoặc trùng) với* Δ_1 và Δ_2.

Nếu $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ *lần lượt là vectơ chỉ phương của* Δ_1, Δ_2 *và* $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \alpha$ *thì góc giữa hai đường thẳng* Δ_1 *và* Δ_2 *bằng* α *hoặc* $180^o - \alpha$ *tuỳ theo* $\alpha \leq 90^o$ *hoặc* $\alpha > 90^o$.

b) *Hai đường thẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng* 90^o.

$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 . \vec{u}_2 = 0$, *với* $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ *lần lượt là vectơ chỉ phương của* Δ_1*và* Δ_2.

2. a) + *Đường thẳng gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng của mặt phẳng đó.*

+ Để đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) điều kiện cần và đủ là a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng (P).

+ Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với đường thẳng a cho trước.

Có duy nhất một đường thẳng Δ *đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước.*

Mặt phẳng đi qua trung điểm O của đoạn thẳng AB và vuông góc với AB gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng đó.

Tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) *Định lí ba đường vuông góc*

Cho đường thẳng a có hình chiếu trên mặt phẳng (P) là đường thẳng a'. Khi đó một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với a khi và chỉ khi nó vuông góc với a'.

c) *Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng và hình chiếu của đường thẳng đó trên mặt phẳng (nếu hình chiếu đó là một điểm thì xem góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng* 90°).

3. a) *Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.*

b) + *Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng* 90°.

+ *Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc là một trong hai mặt phẳng đó chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại.*

+ $$\left.\begin{array}{l} a = (P) \cap (Q) \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (R).$$

II - ĐỀ BÀI

16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, cạnh bên $SA = AB$ và SA vuông góc với BC.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

b) Gọi I, J lần lượt là các điểm thuộc SB và SD sao cho IJ // BD. Chứng minh rằng góc giữa AC và IJ không phụ thuộc vào vị trí của I và J.

17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = 60^{\circ}$, $\widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 120^{\circ}$.

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB với $A'D$ và AC' với $B'D$.

b) Tính diện tích các hình $A'B'CD$ và $ACC'A'$.

c) Tính góc giữa đường thẳng AC' và các đường thẳng AB, AD, AA'.

18. Cho tứ diện $ABCD$ trong đó góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng α. Gọi M là điểm bất kì thuộc cạnh AC, đặt $AM = x$ $(0 < x < AC)$. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với AB, CD.

a) Xác định vị trí điểm M để diện tích thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mp(P) đạt giá trị lớn nhất.

b) Chứng minh rằng chu vi thiết diện nêu trên không phụ thuộc vào x khi và chỉ khi $AB = CD$.

19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, mặt bên SAB là tam giác vuông tại A. Với điểm M bất kì thuộc cạnh AD (M khác A và D), xét mặt phẳng (α) đi qua điểm M và song song với SA, CD.

a) Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mp(α) là hình gì ?

b) Tính diện tích thiết diện theo a và b ; biết $AB = a$, $SA = b$, M là trung điểm của AD.

20. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M và N lần lượt thuộc các đường thẳng BC và AD sao cho $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{NA} = k\overrightarrow{ND}$ với k là số thực khác 0 cho trước. Đặt α là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BA}$; β là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CD}$. Tìm mối liên hệ giữa AB và CD để $\alpha = \beta = 45^{\circ}$.

21. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, H, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, AD, BD. Hãy tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD trong các trường hợp sau :

a) Tứ giác $IJHK$ là hình thoi có đường chéo IH bằng $\sqrt{3}IJ$.

b) Tứ giác $IJHK$ là hình chữ nhật.

22. Cho hai tam giác cân ABC và DBC có chung cạnh đáy BC và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.

a) Chứng minh rằng AD vuông góc với CB.

b) Gọi M và N là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BC.

23. Cho tứ diện $ABCD$ có $CD = \frac{4}{3}AB$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, BD. Cho biết $JK = \frac{5}{6}AB$, tính góc giữa đường thẳng CD với các đường thẳng IJ và AB.

24. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = AD = a$, $AC = BD = b$, $AB = CD = c$. Đặt α là góc giữa BC và AD ; β là góc giữa AC và BD ; γ là góc giữa AB và CD. Chứng minh rằng trong ba số hạng $a^2\cos\alpha$, $b^2\cos\beta$, $c^2\cos\gamma$ có một số hạng bằng tổng hai số hạng còn lại.

25. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Lấy các điểm I, J, K lần lượt thuộc các đường thẳng BC, AC, AD sao cho $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{JA} = k\overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{KA} = k\overrightarrow{KD}$ trong đó k là số khác 0 cho trước. Chứng minh rằng :

a) $MN \perp IJ$ và $MN \perp JK$.

b) $AB \perp CD$.

26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SC$, $SB = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Chứng minh rằng $SO \perp \text{mp}(ABCD)$.

b) Gọi d là giao tuyến của mp(SAB) và mp(SCD) ; d_1 là giao tuyến của mp(SBC) và mp(SAD). Chứng minh rằng $SO \perp \text{mp}(d, d_1)$.

27. Cho hai hình chữ nhật $ABCD$, $ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng khác nhau sao cho hai đường chéo AC và BF vuông góc. Gọi CH và FK lần lượt là hai đường cao của hai tam giác BCE và ADF. Chứng minh rằng :

a) ACH và BFK là các tam giác vuông.

b) $BF \perp AH$ và $AC \perp BK$.

28. a) Cho tứ diện $DABC$ có các cạnh bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của D trên mp(ABC) và I là trung điểm của DH. Chứng minh rằng tứ diện $IABC$ có IA, IB, IC đôi một vuông góc.

b) Cho tứ diện $IABC$ có $IA = IB = IC$ và IA, IB, IC đôi một vuông góc ; H là hình chiếu của I trên mp(ABC). Gọi D là điểm đối xứng của H qua I. Chứng minh tứ diện $DABC$ có các cạnh bằng nhau.

29. Cho hình chóp $S.ABC$ có SB vuông góc với mp(ABC), ABC là tam giác vuông tại A.

a) Chứng minh rằng ACS là tam giác vuông.

b) Tính SA, SB, SC biết rằng $\widehat{ACB} = \alpha$, $\widehat{ACS} = \beta$ và $BC = a$.

30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mp($ABCD$), $SA = a$ và $\widehat{ABC} = 60^{\circ}$.

a) Tính độ dài các cạnh SB, SC, SD.

b) Gọi I là trung điểm của SC. Chứng minh rằng $IB = ID$.

31. Chứng minh rằng nếu các cặp cạnh đối diện của tứ diện $ABCD$ vuông góc với nhau từng đôi một thì trong bốn mặt của tứ diện có ít nhất một mặt là tam giác nhọn (cả ba góc của nó đều nhọn).

32. Cho tứ diện $ABCD$, đáy là tam giác cân và $DA \perp mp(ABC)$, $AB = AC = a$, $BC = \frac{6}{5}a$. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ AH vuông góc với MD (H thuộc đường thẳng MD).

a) Chứng minh rằng $AH \perp mp(BCD)$.

b) Cho $AD = \frac{4}{5}a$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và DM.

c) Gọi G_1, G_2 lần lượt là các trọng tâm của tam giác ABC và tam giác DBC. Chứng minh rằng $G_1G_2 \perp mp(ABC)$.

33. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$.

a) Gọi D_1 là trung điểm của SD. Chứng minh rằng $AD_1 \perp (SCD)$.

b) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, M là điểm thay đổi trên SD. Chứng minh rằng hình chiếu của điểm O trên CM thuộc đường tròn cố định.

34. Trong mặt phẳng (P) cho hai điểm A và B phân biệt. Đoạn thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (P). Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) và đi qua điểm B, H là chân đường vuông góc kẻ từ điểm S đến Δ.

a) Chứng minh rằng điểm H thuộc một đường tròn cố định khi Δ thay đổi.

b) Gọi AK là đường cao của tam giác SAH ; AI là đường cao của tam giác SAB. Chứng minh rằng điểm K thuộc đường tròn cố định khi Δ thay đổi ; Xác định vị trí của đường thẳng Δ để diện tích tam giác AKI đạt giá trị lớn nhất.

c) Hãy xác định vị trí của đường thẳng Δ để độ dài SH đạt giá trị lớn nhất hoặc bé nhất.

35. Cho tam giác ABC vuông tại B. Lấy điểm S bất kì trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) kẻ từ điểm A ($S \not\equiv A$). Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên SB và SC. Chứng minh rằng khi điểm S thay đổi thì

a) Giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (AB_1C_1) là đường thẳng cố định và là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ;

b) Đường thẳng B_1C_1 đi qua điểm cố định I và $\widehat{IAB} = \widehat{ICA}$.

36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác không cân và SA vuông góc với mp(ABC). Gọi AB_1, AC_1 lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và SAC.

a) Chứng minh rằng B_1C_1 và BC là hai đường thẳng cắt nhau.

b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng BC và B_1C_1. Chứng minh rằng $\widehat{IAB} = \widehat{ICA}$.

37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, đường chéo $AC = 4a$, đường chéo $BD = 2a$; O là giao điểm của AC với BD và SO vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SO = h$. Một mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng SC tại điểm C_1. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và h để điểm C_1 nằm trong đoạn thẳng SC, C_1 khác S và khác C. Khi đó, tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mp(α).

38. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn ($\mathscr{C}$) đường kính $AC = 2R$. Gọi H là điểm thuộc AC ($0 < AH < 2R$). Một đường thẳng Δ đi qua H cắt đường tròn ($\mathscr{C}$) tại hai điểm B và D. Gọi S là điểm cố định sao cho SA vuông góc với (P), đặt $SA = h$. Một mặt phẳng (Q) đi qua điểm A và vuông góc với SC cắt các đường thẳng SB, SC, SD, SH lần lượt tại các điểm B_1, C_1, D_1, H_1.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AB_1C_1D_1$ nội tiếp một đường tròn.

b) Đường thẳng Δ phải thoả mãn điều kiện gì để H_1 là trung điểm của B_1D_1 ?

c) Đường thẳng Δ phải thoả mãn điều kiện gì để $AB_1C_1D_1$ là hình vuông ?

39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy ($ABCD$) và $SA = a$.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ là các tam giác vuông.

b) Từ A kẻ $AB_1 \perp SB$, $AD_1 \perp SD$. Chứng tỏ rằng mp(AB_1D_1) $\perp SC$.

Gọi C_1 là giao điểm của SC với mp(AB_1D_1). Chứng tỏ rằng tứ giác $AB_1C_1D_1$ có hai đường chéo vuông góc và tính diện tích của tứ giác đó.

40. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) kẻ từ A. Với điểm M bất kì thuộc Δ, $M \not\equiv A$, gọi K là trực tâm của tam giác MBC và Δ_1 là đường thẳng đi qua K và vuông góc với mặt phẳng (MBC). Chứng minh rằng :

a) Δ_1 đi qua điểm cố định khi M thay đổi trên Δ.

b) Δ_1 cắt Δ tại điểm N và BM vuông góc với CN, CM vuông góc với BN. Xác định vị trí điểm M để độ dài MN đạt giá trị bé nhất.

41. Cho tứ diện $SABC$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau và có SA vuông góc với mp(ABC), $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^o$, $\widehat{ASB} = \alpha$.

a) Chứng minh rằng BC vuông góc với SB. Tìm điểm cách đều các điểm S, A, B, C.

b) Xác định α để hai mặt phẳng (SCA) và (SCB) tạo với nhau góc 60^o.

42. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi S là điểm trong không gian sao cho SAB là tam giác đều và mp(SAB) vuông góc với mp$(ABCD)$.

a) Chứng minh rằng mp$(SAB) \perp$ mp(SAD) và mp$(SAB) \perp$ mp(SBC).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

c) Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC. Chứng minh rằng

$$\text{mp}(SHC) \perp \text{mp}(SDI).$$

43. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với tâm O, $AB = a$, $BC = 2a$. Lấy điểm S trong không gian sao cho SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đặt $SO = h$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính góc giữa mp(SMN) với các mặt phẳng (SAB) và (SCD). Tìm hệ thức liên hệ giữa h và a để mp(SMN) vuông góc với các mặt phẳng (SAB), (SCD).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Tính h theo a để hai mặt phẳng đó vuông góc.

44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Tính :

a) Các góc giữa các mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng đáy của hình chóp.

b) Góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt bên liên tiếp hoặc hai mặt bên đối diện của hình chóp.

45. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mp(DBC). Gọi AE, BF là hai đường cao của tam giác ABC ; H và K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và tam giác DBC. Chứng minh rằng :

a) mp$(ADE) \perp$ mp(ABC) và mp$(BFK) \perp$ mp(ABC) ;

b) $HK \perp$ mp(ABC).

46. Trong mặt phẳng (P), cho hình thoi $ABCD$ với $AB = a$, $AC = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại giao điểm O của hai đường chéo của hình thoi, ta lấy điểm S sao cho $SB = a$. Chứng minh rằng :

a) Tam giác ASC vuông.

b) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SAD) vuông góc với nhau.

47. Cho tam giác cân ABC, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^{\circ}$. Xét hai tia cùng chiều Bt, Ct' và vuông góc với mp(ABC). Lấy điểm B' thuộc Bt, C' thuộc Ct' sao cho $BB' = 3CC'$ và $C' \not\equiv C$.

a) Chứng minh rằng giao tuyến của mp(ABC) và mp$(AB'C')$ cố định khi B', C' thay đổi.

b) Khi $BB' = a$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC), tính diện tích tam giác $AB'C'$.

48. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ và tạo với nhau góc α. Xét hai điểm M và N lần lượt thuộc (P) và (Q). Kẻ MI vuông góc với Δ, NJ vuông góc với Δ. Cho biết $MI = a$, $NJ = b$, $IJ = c$. Tính độ dài MN.

49. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến Δ. Lấy hai điểm A, B cố định thuộc Δ sao cho $AB = a$. Gọi SAB là tam giác đều trong (P), $ABCD$ là hình vuông nằm trong (Q).

a) Tính góc giữa mặt phẳng (SCD) với các mặt phẳng (P) và (Q).

b) Gọi O_1 là giao điểm của hai đường thẳng B_1C và A_1D, ở đó A_1, B_1 tương ứng là các trung điểm của SA, SB. Gọi H_1 là giao điểm của đường cao SH của tam giác SAB với mp(A_1B_1CD). Chứng minh rằng SO_1 vuông góc với SA và CD. Tính góc giữa mp$(A_1B_1O_1)$ với các mặt phẳng (P) và (Q).

50. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a, đường cao $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đường cao AA_1 của tam giác ABC. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với AA_1. Đặt $AM = x$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(P).

b) Tính diện tích thiết diện vừa xác định theo a và x. Xác định vị trí điểm M để diện tích thiết diện đó đạt giá trị lớn nhất.

51. Trong mp(P), cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = b$, $BC = a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC. Trong mặt phẳng qua EF và vuông góc với (P) vẽ nửa đường tròn đường kính EF. Gọi S là điểm bất kì trên nửa đường tròn đó.

a) Chứng minh rằng mp(SEF) vuông góc với hai mặt phẳng (SAD), (SBC) và mp(SAD) vuông góc với mp(SBC).

b) Gọi H', K' lần lượt là hình chiếu của các trực tâm H và K của các tam giác SAD và SBC xuống (P). Chứng minh rằng $HH'.KK'$ không phụ thuộc vào vị trí điểm S.

52. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

a) Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AC' và $A'B$.

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, BC, DD'. Chứng minh rằng AC' vuông góc với mp(MNP).

53. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng h. Điểm M thuộc đoạn AB' sao cho $\dfrac{MA}{MB'} = \dfrac{5}{4}$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng AC và BC'.

b) Một mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với các đường thẳng $A'C$ và BC' cắt đường thẳng CC' tại C_1, tính tỉ số $\dfrac{C_1C}{C_1C'}$.

54. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Xét tứ diện $AB'CD'$. Cắt tứ diện đó bằng mặt phẳng đi qua tâm của hình lập phương và song song với mp(ABC). Tính diện tích thiết diện thu được. Hãy xét kết quả của bài toán khi $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật với ba kích thước là a, b, c.

55. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi C_1 là trung điểm của CC'.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng C_1B và $A'B'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (C_1AB) và (ABC).

b) Chứng minh rằng hình chóp $C_1.ABB'A'$ là hình chóp tứ giác đều.

c) Một mặt phẳng (P) chứa cạnh AB, tạo với mặt phẳng đáy (ABC) góc φ và cắt hình lăng trụ đã cho theo hình có diện tích khác không. Tính diện tích thiết diện đó theo a và φ.