## §2. Hai đường thẳng song song

**22.** Mệnh đề c) đúng.

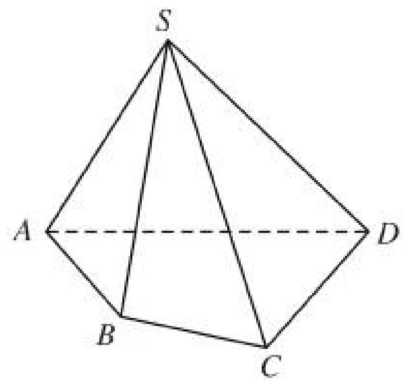
**23.** (h.76)

Chứng minh $SA$ và $BC$ chéo nhau.

Giả sử $SA$ và $BC$ không chéo nhau, tức là chúng đồng phẳng. Khi đó $S$ thuộc mp($ABCD$), điều đó mâu thuẫn với giả thiết S.$ABCD$ là hình chóp.

Vậy $SA$ và $BC$ chéo nhau.

Các cặp đường thẳng còn lại chứng minh tương tự.




*Hình 76*

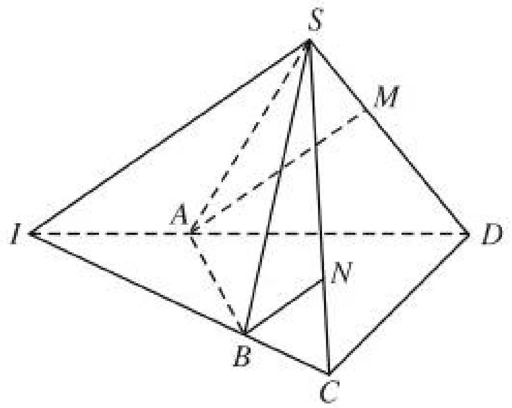
**24.** (h.77)

Gọi $I$ là giao điểm của $BC$ và $AD$. Khi đó

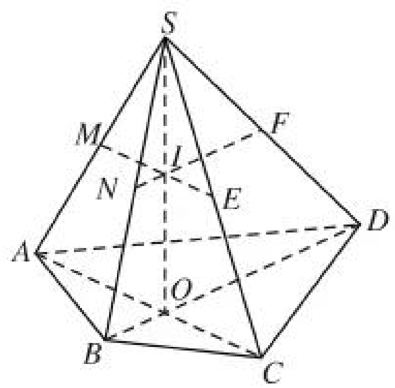
$$(SAD) \cap (SBC) = SI.$$

Giả sử có $M \in SD$, $N \in SC$ sao cho $AM \parallel BN$. Khi đó hai mặt phẳng ($SAD$) và ($SBC$) cắt nhau theo giao tuyến $SI$ phải song song với $AM$ và $BN$. Từ đó ta suy ra cách xác định điểm $M$ và $N$ như sau :

Từ $A$ trong mp($SAD$) ta kẻ đường thẳng song song với $SI$, cắt $SD$ tại $M$ ; từ $B$ trong mp($SBC$) ta kẻ đường thẳng song song với $SI$, cắt $SC$ tại $N$. Khi đó $M$ và $N$ là hai điểm cần tìm.




*Hình 77*




*Hình 78*

**25.** (h.78)

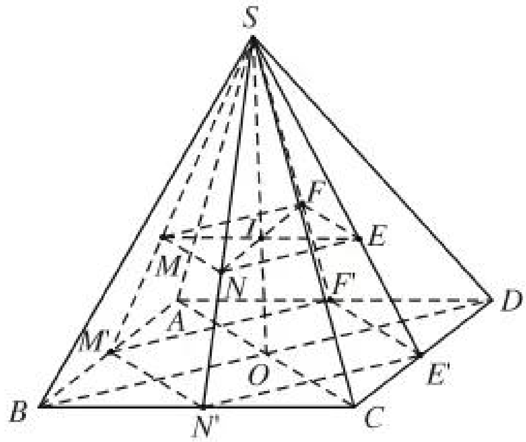
a) Xét tam giác $SAC$. Ta có $ME$ là đường trung bình nên $ME \parallel AC$. Lí luận tương tự, $NF \parallel BD$.

b) Trong mp($SAC$) gọi $I$ là giao điểm của $ME$ và $SO$. Dễ thấy $I$ là trung điểm của $SO$. Từ đó $FI$ là đường trung bình của tam giác $SOD$. Vậy $FI \parallel DO$. Gọi $N'$ là giao điểm của đường thẳng $FI$ với $SB$. Do $FN' \parallel BD$ và $F$ là trung điểm của $SD$ suy ra $N'$ là trung điểm của $SB$, tức là $N' \equiv N$. Vậy ba đường thẳng $ME$, $NF$, $SO$ đồng quy tại $I$.

c) Do $ME$ và $NF$ cắt nhau tại $I$, nên qua $ME$ và $NF$ xác định một mặt phẳng. Từ đó suy ra bốn điểm $M$, $N$, $E$, $F$ đồng phẳng.

**26.** (h.79)

Gọi $M'$, $N'$, $E'$, $F'$ lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $SM$ và $AB$, $SN$ và $BC$, $SE$ và $CD$, $SF$ và $DA$. Khi đó $M'$, $N'$, $E'$, $F'$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$, $BC$, $CD$, $DA$.



*Hình 79*

Vì $M$, $N$ lần lượt là trọng tâm của các tam giác $SAB$ và $SBC$ nên

$$\frac{SM}{SM'} = \frac{SN}{SN'} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow MN \,//\, M'N' \text{ và } MN = \frac{2}{3}M'N'. \qquad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta có :

$$EF \,//\, E'F' \text{ và } EF = \frac{2}{3}E'F' \qquad (2)$$

$$NE \,//\, N'E' \text{ và } NE = \frac{2}{3}N'E' \qquad (3)$$

$$MF \,//\, M'F' \text{ và } MF = \frac{2}{3}M'F'. \qquad (4)$$

a) $M'N'$ là đường trung bình của tam giác $BAC$ suy ra

$$M'N' \,//\, AC \text{ và } M'N' = \frac{1}{2}AC \qquad (5)$$

tương tự $$E'F' \,//\, AC \text{ và } E'F' = \frac{1}{2}AC. \qquad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra $M'N' \,//\, E'F'$ và $M'N' = E'F' = \frac{1}{2}AC.$ (7)

Từ (1), (2), (7) suy ra $MN \,//\, EF$. Vậy bốn điểm $M$, $N$, $E$, $F$ đồng phẳng.

b) Lí luận tương tự như câu a), ta suy ra

$$N'E' \,//\, M'F' \text{ và } N'E' = M'F' = \frac{1}{2}BD. \qquad (8)$$

Từ (1), (2), (3), (4), (7), (8) và $AC = BD$ suy ra

$MN = NE = EF = FM = \frac{1}{3}AC$. Vậy tứ giác $MNEF$ là một hình thoi.

c) Dễ thấy $O$ cũng là giao điểm của $M'E'$ và $N'F'$. Xét ba mặt phẳng $(M'SE')$, $(N'SF')$ và $(MNEF)$. Ta có

$$(M'SE') \cap (N'SF') = SO$$
$$(M'SE') \cap (MNEF) = ME$$
$$(N'SF') \cap (MNEF) = NF$$
$$ME \cap NF = I.$$

Vậy theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì ba đường thẳng $SO$, $ME$ và $NF$ đồng quy.

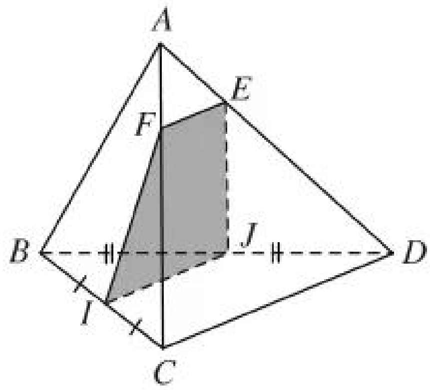
**27.** (h.80)

a) Ta có $IJ$ là đường trung bình của tam giác $BCD$ nên $IJ \parallel CD$.

Mặt khác $IJ \subset (IJE)$ ; $CD \subset (ACD)$, suy ra mp$(IJE)$ cắt mp$(ACD)$ theo giao tuyến $Ex \parallel CD$. Gọi $F$ là giao điểm của $Ex$ và $AC$. Thiết diện là hình thang $EFIJ$.

b) Để thiết diện $EFIJ$ là hình bình hành điều kiện cần và đủ là $IF \parallel JE$.

Điều này tương đương với $JE \parallel AB$ tức là khi và chỉ khi $E$ là trung điểm của $AD$.



*Hình 80*

c) Thiết diện $EFIJ$ là hình thoi $\Leftrightarrow$ $EFIJ$ là hình bình hành và $IF = IJ \Leftrightarrow E$ là trung điểm của $AD$ và $AB = CD$ (vì $IJ = \dfrac{1}{2}CD$ và khi $E$ là trung điểm của $AD$ thì $IF = \dfrac{1}{2}AB$).

**28.** (h.81)

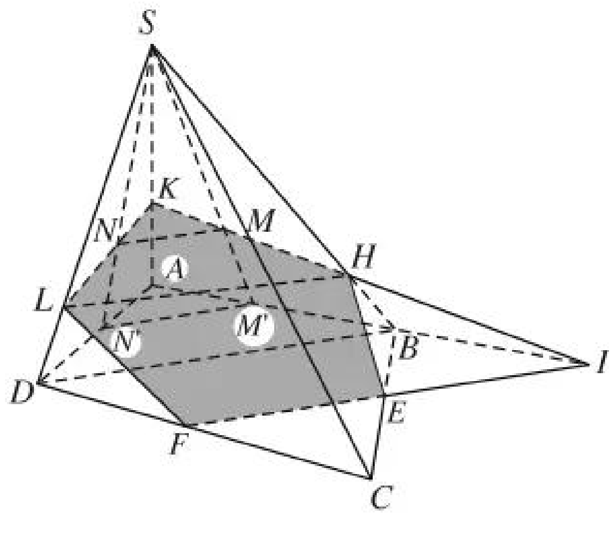
a) Gọi $M'$ và $N'$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $AD$. Dễ thấy :

$$\left.\begin{array}{r} MN \parallel M'N' \\ M'N' \parallel BD \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel BD.$$

b) Ta có :

$$MN \subset (MNE)$$
$$BD \subset (ABCD)$$
$$MN \parallel BD$$

$\Rightarrow (MNE) \cap (ABCD) = Ex$ thoả mãn $Ex \parallel NM \parallel BD$.



*Hình 81*

Vậy từ $E$ ta kẻ đường thẳng song song với $BD$ lần lượt cắt $CD$, $AB$ tại $F$, $I$. Nối $IM$ lần lượt cắt $SB$ và $SA$ tại $H$ và $K$ ; nối $KN$ cắt $SD$ tại $L$. Thiết diện cần tìm là ngũ giác $KLFEH$.

c) Ta có :

$$NM \subset \text{mp}(MNE)$$

$$DB \subset \text{mp}(SBD)$$

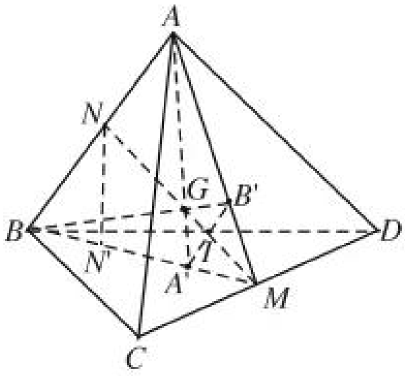
$$MN \,//\, DB$$

và $$(MNE) \cap (SBD) = LH.$$

Suy ra $$LH \,//\, DB.$$

**29.** (h.82)

a) Gọi $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ lần lượt là trọng tâm của các tam giác $BCD$, $CDA$, $ADB$ và $ABC$. Do $A$, $B$, $C$, $D$ không đồng phẳng nên $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ không đồng phẳng. Ta chứng minh các đoạn thẳng đó từng đôi cắt nhau.




*Hình 82*

Gọi $M$ là giao điểm của $BA'$ và $CD$. Khi đó $M$ là trung điểm của $CD$. Vì $B'$ là trọng tâm tam giác $ACD$ nên ba điểm $A, B', M$ thẳng hàng. Vậy $AA'$ và $BB'$ cùng thuộc mp($ABM$) và $A'$ thuộc đoạn $BM$, $B'$ thuộc đoạn $AM$ nên $AA'$ và $BB'$ cắt nhau tại điểm $G$ nào đó. Lí luận tương tự, ta cũng có các đường thẳng nói trên từng đôi cắt nhau. Vậy chúng phải đồng quy.

Ta có thể chứng minh cách khác như sau :

Lí luận như trên, trong tam giác $ABM$ ta có $AA'$ và $BB'$ cắt nhau tại $G$. Vì

$$\frac{A'M}{MB} = \frac{B'M}{MA} = \frac{1}{3}$$

nên $A'B' \,//\, AB$.

Suy ra $$\frac{GA'}{GA} = \frac{GB'}{GB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{MA'}{MB} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $$\frac{GA'}{GA} = \frac{GB'}{GB} = \frac{1}{3}.$$

Nhưng $AA'$, $BB'$ là hai đoạn thẳng tuỳ ý trong bốn đoạn thẳng $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$. Vậy chúng đồng quy tại điểm $G$ và điểm $G$ chia trong mỗi đoạn thẳng đó theo tỉ số 3 : 1 kể từ đỉnh đến trọng tâm của mặt đối diện.

b) Nối $M$ với $G$ và kéo dài cắt $AB$ tại $N$. Ta sẽ chứng minh $N$ là trung điểm của $AB$ và $G$ là trung điểm của $MN$. Thật vậy, gọi $I$ là giao điểm của $MN$ với $A'B'$. Vì $A'B' \,//\, AB$, ta có :

$$\frac{IB'}{NB} = \frac{GB'}{GB} = \frac{1}{3}\ ;\ \frac{IB'}{NA} = \frac{MB'}{MA} = \frac{1}{3}$$

nên $$\frac{IB'}{NB} = \frac{IB'}{NA} \Rightarrow NB = NA.$$

Suy ra $N$ là trung điểm của $AB$.

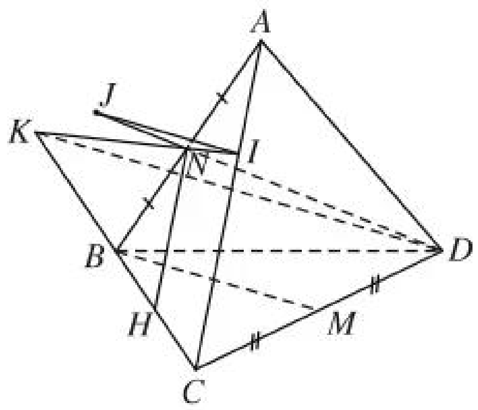
Kẻ $NN' \,//\, AA'$ ($N' \in BA'$).

Ta có $N'$ là trung điểm của $BA'$, suy ra $A'$ là trung điểm của $N'M$. Do đó $A'G$ là đường trung bình của tam giác $MNN'$. Suy ra $G$ là trung điểm của $MN$.

Vậy điểm $G$ là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

**30.** (h.83)

a) Trong mp($BCD$), từ $D$ kẻ đường thẳng song song với $BM$ cắt $CB$ tại $K$. Đường thẳng $KN$ cắt $AC$ tại $I$. Trong mp($IKD$), từ $I$ kẻ đường thẳng song song với $DK$ cắt đường thẳng $DN$ tại $J$. Khi đó theo cách dựng ta có $IJ \,//\, BM$.




*Hình 83*

b) Do $BM$ là đường trung bình của tam giác $CKD$ nên

$$KD = 2BM = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Gọi $H$ là trung điểm của $BC$. Khi đó

$$NH \,//\, AC \Rightarrow \frac{NK}{NI} = \frac{KH}{HC} = \frac{3HC}{HC} = 3$$

$$\Rightarrow NK = 3NI \Rightarrow KD = 3IJ.$$

Vậy $$IJ = \frac{1}{3}KD = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

**31.** a) *Trường hợp 1. MN // EF.*

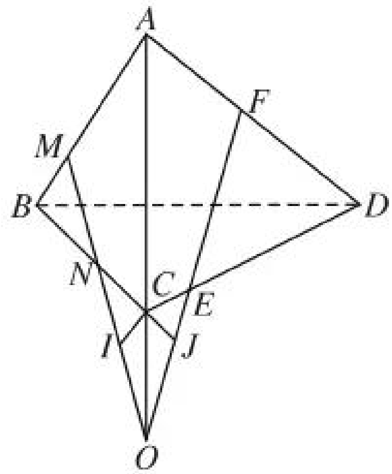
Theo hệ quả của định lí giao tuyến của ba mặt phẳng $(ABC)$, $(ACD)$, $(MNEF)$ ta có $MN \parallel EF \parallel AC$. Do đó ta có

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB}, \frac{EC}{ED} = \frac{FA}{FD}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = \frac{NC}{NB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{FA}{FD} \cdot \frac{FD}{FA} = 1 \text{ suy ra đpcm.}$$

*Trường hợp 2.* $MN$ cắt $EF$ tại $O$ (h.84).

Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng $(ABC)$, $(ACD)$, $(MNEF)$ ta có $MN$, $AC$, $EF$ đồng quy tại $O$. Kẻ $CI \parallel AB$, $CJ \parallel AD$ ($I \in MN$, $J \in FE$), ta có



*Hình 84*

$$\frac{NB}{NC} = \frac{MB}{CI}, \frac{OC}{OA} = \frac{CI}{MA}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{OC}{OA} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{MB}{CI} \cdot \frac{CI}{MA} = 1.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} \cdot \frac{OA}{OC} = 1.$$

Vậy
$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OC}{OA} = 1.$$

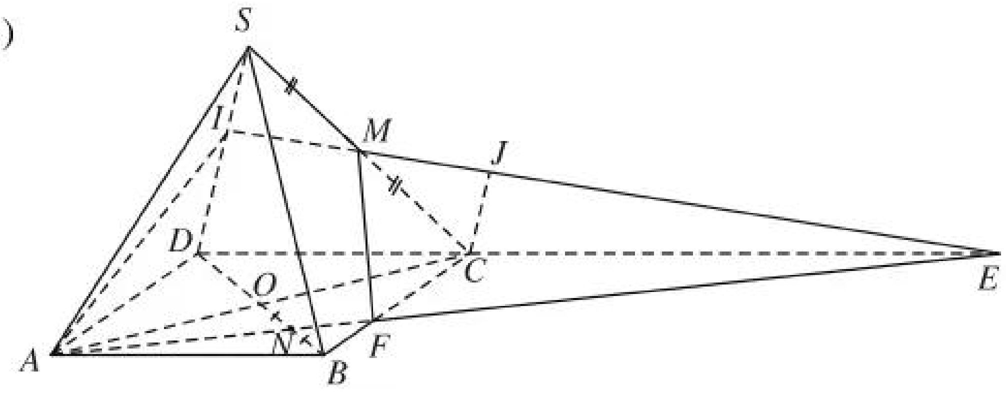
b) Giả sử mặt phẳng $(MNE)$ cắt cạnh $AD$ tại $F'$. Theo câu a), ta có

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{F'D}{F'A} = 1.$$

Theo giả thiết $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = 1 \Rightarrow F'D = FD$.

Vì $F$, $F'$ đều nằm trong đoạn thẳng $AD$ nên $F' \equiv F$. Điều này có nghĩa là bốn điểm $M$, $N$, $E$, $F$ đồng phẳng.

**32.** (h.85)




*Hình 85*

a) Kéo dài $AN$ cắt $DC$ tại $E$. Nối $E$ và $M$ cắt $SD$ tại $I$, thế thì $I$ chính là giao điểm của $SD$ và mp($AMN$).

b) Gọi $F$ là giao điểm của $AN$ với $BC$.

$BF \mathbin{//} AD \Rightarrow \dfrac{BF}{AD} = \dfrac{NB}{ND} = \dfrac{1}{3}$.

Từ $\qquad \dfrac{BF}{AD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{FC}{AD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{EC}{ED} = \dfrac{FC}{AD} = \dfrac{2}{3}$.

Kẻ $CJ \mathbin{//} SD$ ($J \in EI$). Ta có :

$$\frac{MC}{MS} = \frac{CJ}{IS}, \frac{ID}{CJ} = \frac{ED}{EC} \Rightarrow \frac{IS}{ID} = \frac{MS}{MC} \cdot \frac{EC}{ED} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Vậy $\dfrac{IS}{ID} = \dfrac{2}{3}$.