§3. Đường thẳng song song với mặt phẳng

33. (h.86)

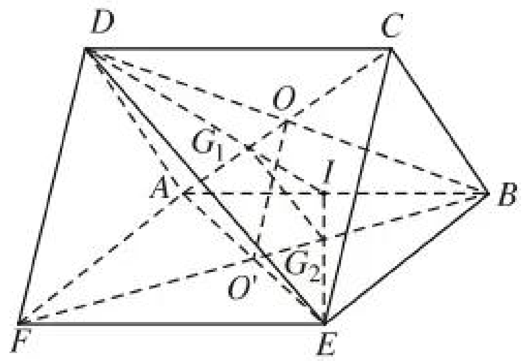
a) OO' là đường trung bình của tam giác BDF suy ra $OO' \parallel DF$.

Mà $DF \subset (ADF) \Rightarrow OO' \parallel (ADF)$.

OO' là đường trung bình của tam giác ACE suy ra $OO' \parallel CE$.

Mà $CE \subset (BCE) \Rightarrow OO' \parallel (BCE)$.

b) Gọi I là trung điểm của AB thì I thuộc đường thẳng G_1D và đường thẳng G_2E.



Hình 86

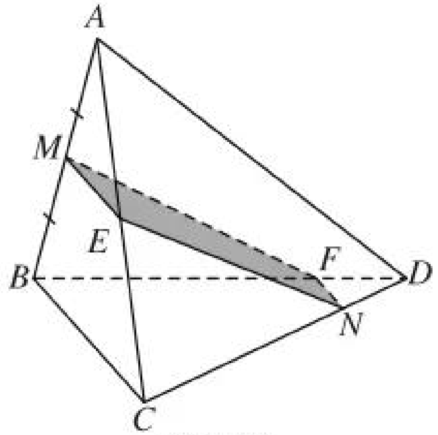
Xét tam giác IDE. Ta có

$$\frac{IG_1}{ID} = \frac{IG_2}{IE} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, ED.$$

Do đường thẳng DE nằm trong mp(CEF) suy ra $G_1G_2 \,//\, (CEF)$.

34. (h.87)

a) Mặt phẳng (ABC) chứa BC và $BC \,//\, (P)$ nên (ABC) cắt (P) theo giao tuyến $ME \,//\, BC$ ($E \in AC$). Tương tự, mp(DBC) cắt (P) theo giao tuyến $NF \,//\, BC$ ($F \in BD$). (Dễ thấy E là trung điểm của AC). Thiết diện là hình thang $MENF$.



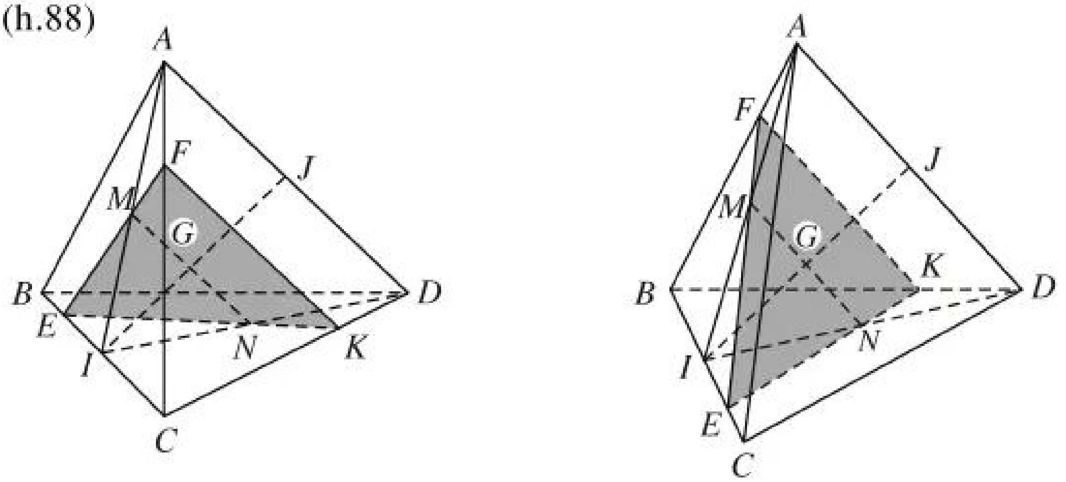
Hình 87

b) Từ câu a), ta có :

$$ME \,//\, NF \text{ và } ME = \frac{1}{2}BC.$$

Vậy tứ giác $MENF$ là hình bình hành khi và chỉ khi $NF = ME = \frac{1}{2}BC$, hay N là trung điểm của CD.

35. a) (h.88)



Hình 88

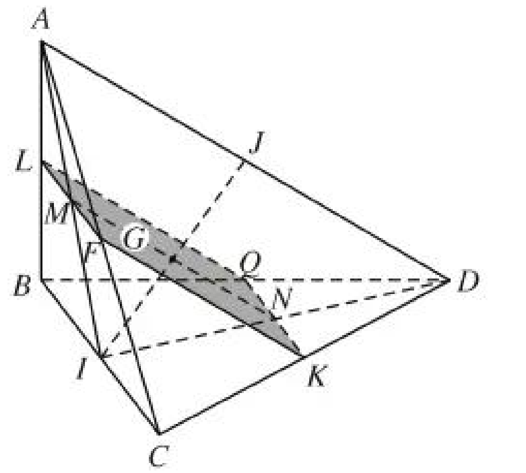
Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BC và AD thì G là trung điểm của IJ. Mặt phẳng (IAD) chứa AD, $AD \,//\, (P)$ nên (IAD) cắt (P) theo giao tuyến MN qua G và song song với AD ($M \in AI$, $N \in DI$).

Khi E trùng với I, thiết diện không tồn tại.

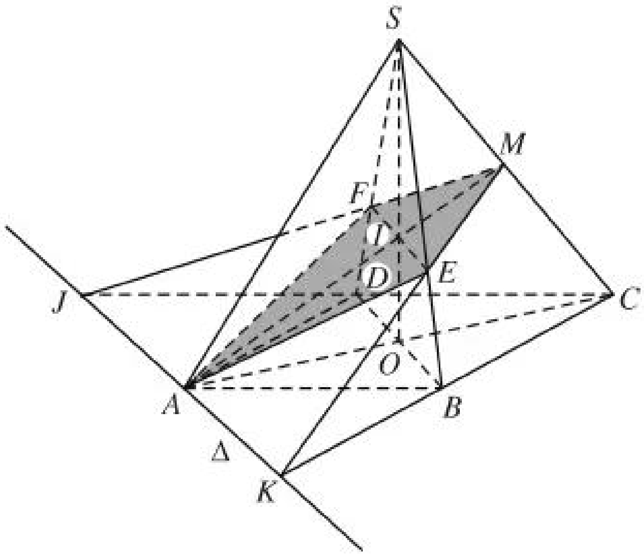
Khi E không trùng với I, ta có thiết diện là tam giác EFK.

b) (h.89)

Theo câu a), mặt phẳng cắt (*P*) song song với *AD* và chứa *MN*. Mặt khác (*P*) song song với *BC* nên nó cắt mp(*ABC*) và (*BCD*) theo các giao tuyến lần lượt qua *M*, *N* và song song với *BC*. Vậy thiết diện là hình bình hành *LFKQ*.



Hình 89



Hình 90

36. (h.90)

a) Gọi *I* là giao điểm của *SO* và *AM* (*O* là giao điểm của *AC* và *BD*). Vì *BD* // (*P*) nên mặt phẳng (*SBD*) chứa *BD* cắt (*P*) theo giao tuyến qua *I* và song song với *BD*. Gọi *E* và *F* lần lượt là giao điểm của giao tuyến này với các cạnh *SB* và *SD* thì *E* và *F* lần lượt là giao điểm của *SB* và *SD* với mặt phẳng (*P*).

Vậy thiết diện là tứ giác *AEMF*.

b) Dễ thấy *I* là trọng tâm tam giác *SAC*, ta có :

$$\frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}.$$

Do đó

$$\frac{S_{SME}}{S_{SBC}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SE}{SB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{S_{SMF}}{S_{SCD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SF}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

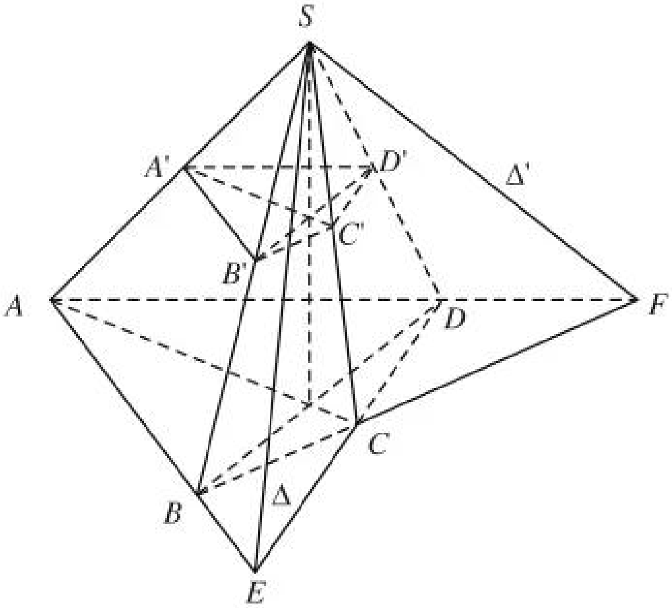
c) Dễ thấy K, A, J là ba điểm chung của hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$ nên chúng nằm trên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng này. Vì $BD \,//\, (P)$ và $BD \subset (ABCD)$ nên $\Delta \,//\, BD \Rightarrow \Delta \,//\, EF$. Ta có :

$$\frac{EF}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \text{ ; } KJ = 2BD.$$

Vậy $$\frac{EF}{KJ} = \frac{1}{3}.$$

37. (h.91)

a) Thiết diện $A'B'C'D'$ là hình thang khi và chỉ khi $A'B' \,//\, C'D'$ hoặc $A'D' \,//\, B'C'$. Ta có :



Hình 91

- $A'B' \,//\, C'D'$ khi và chỉ khi giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) song song với $A'B'$ tức là $\Delta \,//\, \text{mp}(P)$.

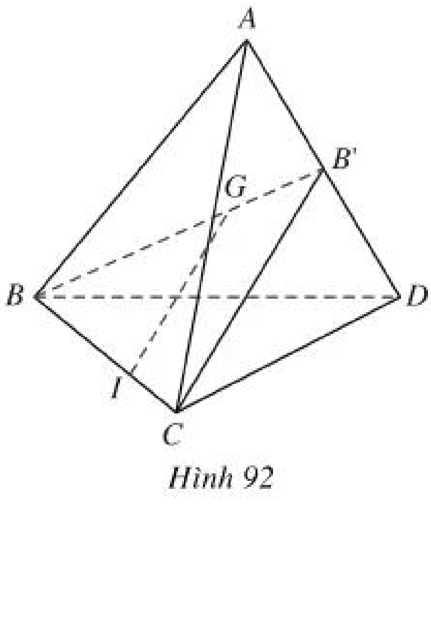
- $A'D' \,//\, C'B'$ khi và chỉ khi giao tuyến Δ' của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) song song với $A'D'$ tức là $\Delta' \,//\, \text{mp}(P)$.

Vậy tứ giác $A'B'C'D'$ là hình thang khi và chỉ khi (P) song song với Δ hoặc song song với Δ'.

b) Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành khi và chỉ khi mp(P) song song với cả hai đường thẳng Δ và Δ'.

38. (h.92)

Gọi B' là giao điểm của đường thẳng BG và AD. Khi đó B' là trung điểm của AD và $BG = 2GB'$. Mặt khác ta có $BI = 2IC$. Do đó $GI \,//\, CB'$. Mà CB' nằm trên mp(ACD) nên IG song song với mp(ACD).



Hình 92

39. (h.93)

a) Ta có $AB \parallel (P)$, $AB \subset (ABC)$

$\Rightarrow (ABC) \cap (P) = MF \parallel AB$

và $AB \parallel (P)$, $AB \subset (ABD)$

$\Rightarrow (ABD) \cap (P) = NE \parallel AB$.

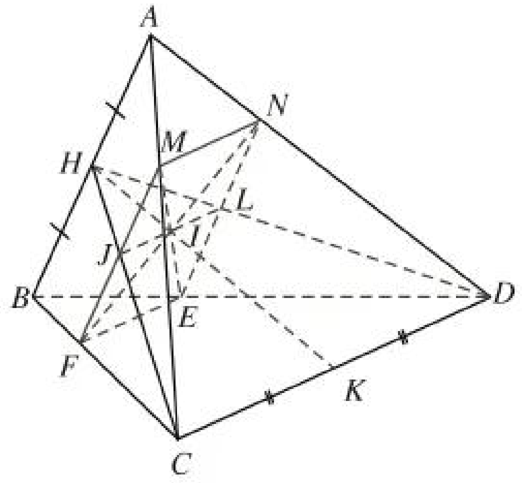
Vậy $MF \parallel NE \parallel AB$. (1)

Chứng minh tương tự ta có

$MN \parallel EF \parallel CD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MNEF$ là hình bình hành.

b) Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và CD.



Hình 93

Gọi J và L lần lượt là các giao điểm của các cặp đường thẳng CH và MF, DH và NE thì rõ ràng ba điểm J, I, L thẳng hàng. Vậy khi (P) di động thì tâm I của hình bình hành $MNEF$ chạy trên đoạn thẳng HK.

Ngược lại, lấy một điểm I bất kì trên đoạn thẳng HK. Qua I kẻ đường thẳng song song với CD lần lượt cắt CH và DH tại J và L. Qua J và L lần lượt kẻ hai đường thẳng MF ($M \in AC$, $F \in BC$), NE ($N \in AD$, $E \in BD$) cùng song song với AB. Dễ thấy tứ giác $MNEF$ là hình bình hành và có tâm là I.

Vậy tập hợp tâm I của hình bình hành $MNEF$ là đoạn thẳng HK.