§3. Phép đối xứng trục

18. a) Giả sử M nằm trên đường thẳng AB và M' là ảnh của M qua phép dời hình F. Khi đó, vì F biến đường thẳng AB thành đường thẳng AB và giữ nguyên thứ tự ba điểm A, B, M cũng giống như thứ tự ba điểm A, B, M'. Ngoài ra vì $AM = AM'$ và $BM = BM'$, nên điểm M phải trùng với M'.

b) Gọi N là một điểm không nằm trên đường thẳng AB và $N' = F(N)$. Ta có N' khác N, vì nếu $N' \equiv N$ thì F là phép đồng nhất. Như vậy, hai tam giác ABN và ABN' bằng nhau suy ra N và N' đối xứng với nhau qua đường thẳng AB. Vậy F là phép đối xứng qua AB.

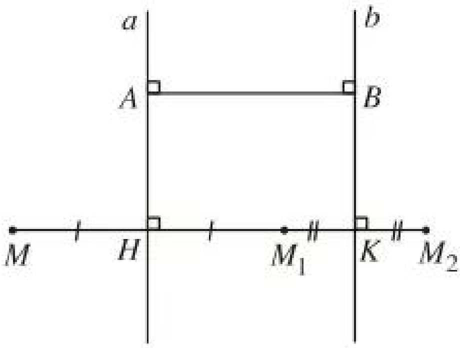
19. Gọi F là phép dời hình biến A thành A, B thành B, ta lấy điểm C không thẳng hàng với A, B và C' là ảnh của C qua phép dời hình F. Khi đó tam giác ABC bằng tam giác ABC'. Chỉ có hai trường hợp xảy ra :

+ Điểm C' trùng với điểm C. Khi đó F là phép đồng nhất (bài tập 9).

+ Điểm C' đối xứng với điểm C qua đường thẳng AB. Khi đó F là phép đối xứng qua đường thẳng AB (bài tập 12).

20. a) (h.7)

Giả sử $Đ_a$, $Đ_b$ là các phép đối xứng trục có trục lần lượt là a, b mà $a \parallel b$ và F là hợp thành của $Đ_a$ và $Đ_b$. Lấy hai điểm A, B lần lượt nằm trên a, b sao cho $AB \perp a$. Với điểm M bất kì, $Đ_a$ biến M thành M_1 và $Đ_b$ biến M_1 thành M_2. Nếu gọi H và K lần lượt là trung điểm của MM_1 và M_1M_2 thì



Hình 7

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$$
$$= 2(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1K}) = 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{AB}.$$

Vì phép hợp thành F biến M thành M_2 mà $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{AB}$ nên F là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$.

b) Giả sử T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$. Lấy một đường thẳng a nào đó vuông góc với $\vec{u}$ và đường thẳng b là ảnh của a qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\vec{u}$ thì theo câu a) phép tịnh tiến T là hợp thành của phép đối xứng trục $Đ_a$ và phép đối xứng trục $Đ_b$. Vì có nhiều cách chọn đường thẳng a, nên có nhiều phép đối xứng $Đ_a$ và $Đ_b$ có hợp thành là T.

c) Hợp thành của hai phép đối xứng có trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến. Vì vậy, hợp thành của $2n$ phép đối xứng trục (có trục đối xứng song song) là hợp thành của n phép tịnh tiến, do đó cũng là phép tịnh tiến.

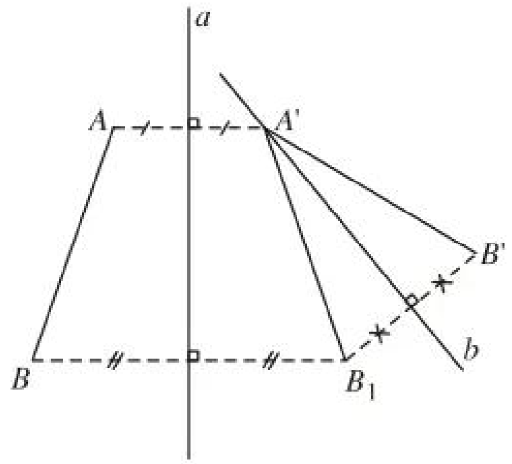
d) Giả sử F là hợp thành của $2n + 1$ phép đối xứng trục. Gọi phép đối xứng trục thứ nhất là $Đ_a$ (có trục là đường thẳng a), $2n$ phép đối xứng trục còn lại có hợp thành là phép tịnh tiến T. Ta có thể xem T là hợp thành của hai phép đối xứng mà phép thứ nhất là $Đ_a$ và phép thứ hai là $Đ_b$. Vậy F là hợp thành của ba phép đối xứng : $Đ_a$, $Đ_a$ và $Đ_b$. Nhưng vì hợp thành của $Đ_a$ và $Đ_a$ là phép đồng nhất e nên F chính là phép đối xứng $Đ_b$.

e) Có thể xem phép tịnh tiến T là hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_b$ và $Đ_c$. Vì vectơ tịnh tiến vuông góc với a nên $a \parallel b \parallel c$. Do đó, ta được hợp thành của ba phép đối xứng có trục song song. Vậy theo kết quả câu d), ta được một phép đối xứng trục.

21. (h.8)

Nếu A và A' trùng nhau, B và B' trùng nhau thì phép cần tìm là phép đối xứng trục có trục AB.

Nếu A không trùng A' thì ta lấy a là trung trực của AA'. Khi đó phép đối xứng trục $Đ_a$ biến A thành A'. Kí hiệu B_1 là ảnh của B qua phép $Đ_a$. Nếu B_1 trùng B' thì $Đ_a$ là phép đối xứng trục cần tìm. Nếu B_1 khác với B' thì $A'B_1 = AB$ nên $A'B_1 = A'B'$. Từ đó, suy ra đường trung trực b của đoạn thẳng B_1B' đi qua điểm A' và do đó phép đối xứng trục $Đ_b$ biến A' thành A' và biến B_1 thành B'.



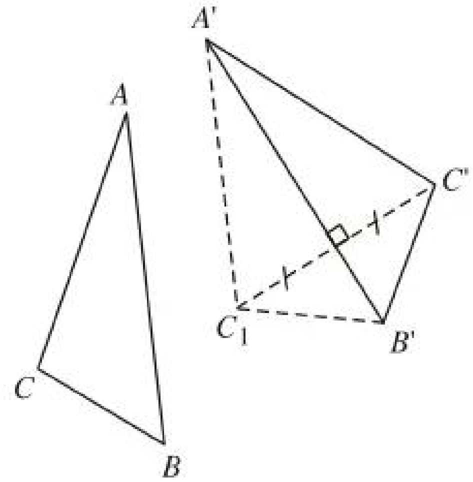
Hình 8

Vậy hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ là phép dời hình biến A thành A' và biến B thành B'.

22. (h.9)

Theo bài toán trên ta có hai phép đối xứng trục $Đ_1$ và $Đ_2$ mà hợp thành của chúng biến A thành A' và biến B thành B'. Phép hợp thành đó là phép dời hình nên nó biến điểm C thành điểm C_1 sao cho hai tam giác ABC và $A'B'C_1$ bằng nhau. Vậy C_1 phải trùng với C' hoặc đối xứng với C' qua đường thẳng $A'B'$. Nếu C_1 trùng với C' thì phép hợp thành nói trên là phép cần tìm.

Nếu C_1 khác với C' thì vì hai tam giác $A'B'C_1$ và $A'B'C'$ bằng nhau nên phép đối xứng $Đ_c$ với c là đường thẳng $A'B'$ sẽ biến tam giác $A'B'C_1$ thành tam giác $A'B'C'$. Vậy hợp thành của ba phép $Đ_a$, $Đ_b$ và $Đ_c$ là phép dời hình cần tìm.



Hình 9

23. a) Phép đối xứng qua Ox biến điểm $M(x\,;\,y)$ thành điểm $M'(x'\,;\,y')$ mà $x = x'$ và $y = y'$. Nếu $M(x\,;\,y)$ nằm trên d thì $Ax + Bx + C = 0$ hay $Ax' - By' + C = 0$. Vậy $M'(x'\,;\,y')$ thoả mãn phương trình $Ax - By + C = 0$. Đó là phương trình ảnh của d qua phép đối xứng trục Ox.

b) Phép đối xứng qua Oy biến điểm $M(x\,;\,y)$ thành điểm $M'(x'\,;\,y')$ mà $x = -x'$ và $y = y'$. Nếu $M(x\,;\,y)$ nằm trên $(\mathscr{C})$ thì

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 2ax' + 2by' + c = 0.$$

Vậy $M'(x'\,;\,y')$ thoả mãn phương trình $x^2 + y^2 - 2ax + 2by + c = 0$. Đó là phương trình ảnh của $(\mathscr{C})$ qua phép đối xứng trục với trục là Oy.

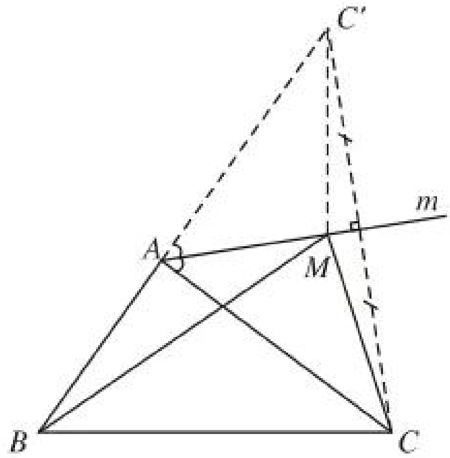
c) Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm là $I(-a\,;\,-b)$, rõ ràng tâm I nằm trên đường thẳng $bx - ay = 0$. Suy ra phép đối xứng qua đường thẳng đó biến $(\mathscr{C})$ thành chính nó. Vậy ảnh của $(\mathscr{C})$ có phương trình trùng với phương trình của $(\mathscr{C})$.

24. (h.10)

Gọi C' là điểm đối xứng với điểm C qua đường phân giác ngoài m. Khi đó hiển nhiên A nằm giữa B và C'. Với mọi điểm M nằm trên m ta có

$MB + MC = MB + MC' \geq BC'$.
Mà $BC' = AB + AC' = AB + AC$.

Vậy $MB + MC + BC \geq AB + AC + BC$.
Đó là điều phải chứng minh.



Hình 10

25. (h.11)

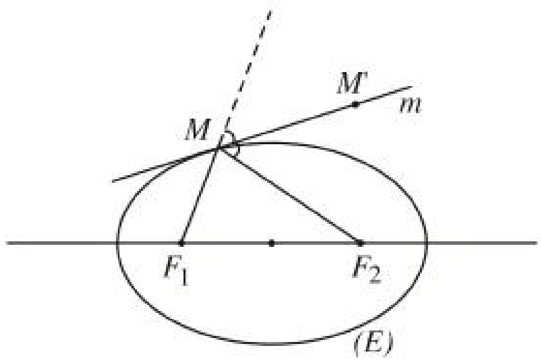
Giả sử elip (E) có trục lớn là $2a$, tức là điểm M nằm trên (E) khi và chỉ khi

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Theo chứng minh bài tập 24, nếu M' nằm trên phân giác m thì

$$M'F_1 + M'F_2 \geq MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M' trùng M. Vậy nếu M' khác M thì M' không nằm trên (E). Từ đó, suy ra m cắt (E) tại điểm duy nhất M.



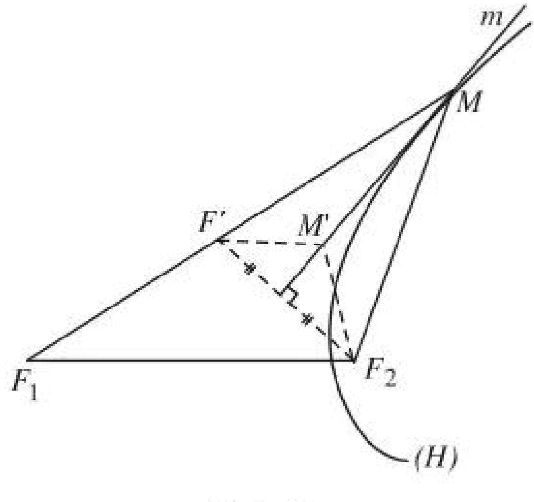
Hình 11

26. (h.12)

Giả sử hypebol (H) có trục thực là $2a$, nghĩa là điểm M nằm trên (H) khi và chỉ khi

$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$

Ta xét trường hợp $MF_1 - MF_2 = 2a$ (trường hợp $MF_2 - MF_1 = 2a$ chứng minh tương tự). Gọi F' là điểm đối xứng với F_2 qua phân giác m thì F' nằm giữa M và F_1. Khi đó, nếu lấy M' nằm trên m thì



Hình 12

$$\begin{aligned} M'F_1 - M'F_2 = M'F_1 - M'F' \le F_1F' &= MF_1 - MF' \\ &= MF_1 - MF_2 \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi M' trùng M. Vậy nếu M' khác M thì M' không nằm trên (H). Từ đó suy ra m cắt (H) tại điểm duy nhất M.

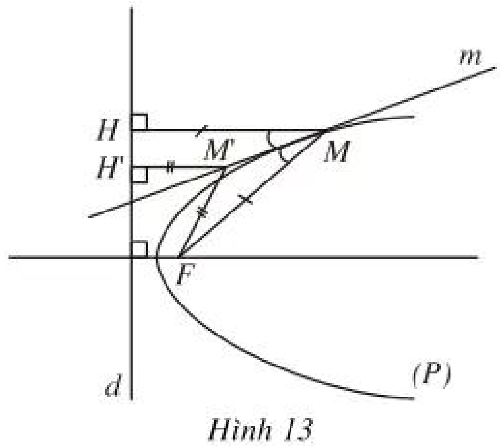
27. (h.13)

Vì M nằm trên parabol (P) nên $MF = MH$. Do đó m chính là đường trung trực của đoạn thẳng FH. Lấy điểm M' tuỳ ý nằm trên m, kẻ

$$M'H' \perp d \ (H' \in d)$$

thì ta có $M'F = M'H \ge M'H'$.

Nếu M' không trùng với M thì $M'F > M'H'$ nên M' không nằm trên (P).

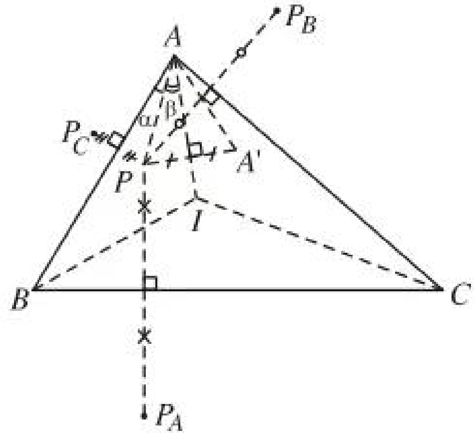


Hình 13

Vậy M chỉ cắt (P) tại điểm duy nhất M.

28. (h.14)

Ta xét trường hợp P nằm trong góc BAI. Gọi P_A, P_B, P_C là các điểm đối xứng với P lần lượt qua các đường thẳng BC, CA, AB. Ta chứng minh rằng AA' là đường trung trực của đoạn thẳng P_BP_C. Thật vậy, nếu ta kí hiệu $\widehat{PAB} = \alpha$, $\widehat{PAI} = \beta$, ta có



Hình 14

$$\widehat{P_C AA'} = \widehat{P_C AP} + \widehat{PAA'} = 2\alpha + 2\beta$$

và

$$\widehat{A'AP_B} = \widehat{A'AC} + \widehat{CAP_B} = \widehat{A'AC} + \widehat{CAP} = \alpha + \alpha + 2\beta = 2\alpha + 2\beta.$$

Vậy $\widehat{P_C AA'} = \widehat{A'AP_B}$.

Ngoài ra, hiển nhiên $AP_C = AP_B$. Suy ra AA' là đường trung trực của đoạn thẳng P_BP_C. Chứng minh tương tự, ta cũng có BB' là đường trung trực của đoạn thẳng P_CP_A và CC' là đường trung trực của đoạn thẳng P_AP_B. Suy ra AA', BB', CC' đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $P_AP_BP_C$.

Trường hợp P nằm trong góc CAI, lập luận tương tự.

29. (h.15)

Trước hết, dễ thấy rằng các điểm A, B, C lần lượt nằm trên các cạnh $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ của tam giác $A'B'C'$ và các đường thẳng AA', BB', CC' đi qua tâm O của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

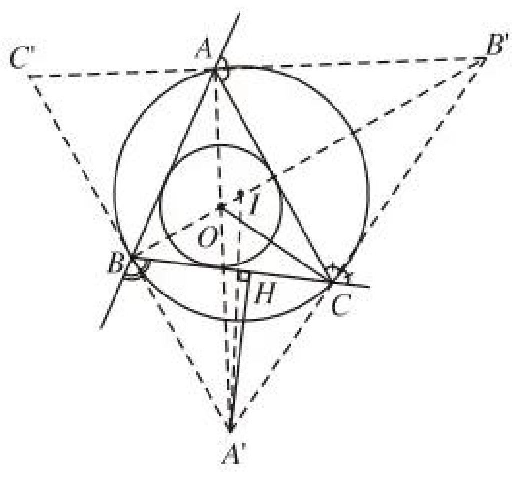
Kẻ $A'H \perp BC$ ($H \in BC$) ta có

$$\widehat{CA'H} = \widehat{OCB}$$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc) và

$$\widehat{OCB} = \widehat{BA'O}$$

(do tứ giác $OBA'C$ nội tiếp đường tròn).



Hình 15

Từ đó, suy ra

$$\widehat{CA'H} = \widehat{BA'O}.$$

Do đó, nếu gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$ thì $A'I$ là phân giác góc $B'A'C'$ nên $A'H$ đối xứng với $A'O$ qua đường thẳng $A'I$. Bởi vậy $A'H$ đi qua điểm đối xứng với O qua phân giác $A'I$. Tương tự ta cũng có đường thẳng đi qua B', vuông góc với AC cũng đi qua điểm đối xứng với O qua $B'I$ và đường thẳng đi qua C', vuông góc với AB cũng đi qua điểm đối xứng với O qua $C'I$. Từ đó, áp dụng bài tập 28 ta suy ra điều phải chứng minh.