§3. Phép đối xứng trục

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phép đối xứng qua đường thẳng a là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng a.

Phép đối xứng qua đường thẳng a còn gọi là phép đối xứng trục. Đường thẳng a gọi là trục của phép đối xứng.

2. Phép đối xứng trục là một phép dời hình.

3. Trục đối xứng của hình $\mathscr{H}$ là đường thẳng mà phép đối xứng qua đường thẳng đó biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}$.

II - ĐỀ BÀI

18. Cho hai điểm phân biệt A, B và phép dời hình F khác với phép đồng nhất sao cho $F(A) = A$, $F(B) = B$. Chứng minh rằng :

a) Nếu điểm M nằm trên đường thẳng AB thì $F(M) = M$;

b) F là phép đối xứng qua đường thẳng AB.

19. Cho hai điểm A, B phân biệt. Có những phép dời hình nào biến A thành A và biến B thành B.

20. Chứng minh rằng :

a) Hợp thành của hai phép đối xứng trục có các trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến.

b) Mỗi phép tịnh tiến đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục đối xứng song song bằng nhiều cách.

c) Hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng trục có trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến.

d) Hợp thành của một số lẻ các phép đối xứng có trục đối xứng song song là một phép đối xứng trục.

e) Cho phép đối xứng trục $Đ_a$ qua đường thẳng a và phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$ vuông góc với a. Chứng tỏ rằng hợp thành của $Đ_a$ và T là phép đối xứng trục, hợp thành của T và $Đ_a$ cũng là phép đối xứng trục.

21. Cho hai đoạn thẳng bằng nhau $AB = A'B'$. Chứng minh rằng có thể tìm được một phép đối xứng trục hoặc hợp thành của hai phép đối xứng trục để biến A thành A', biến B thành B'.

22. Cho hai tam giác bằng nhau ABC và $A'B'C'$ ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$). Chứng minh rằng chỉ cần tối đa ba phép đối xứng trục để hợp thành của chúng biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$.

23. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng d và đường tròn $(\mathscr{C})$ lần lượt có phương trình :

$$d\ :\ Ax + By + C = 0\ ;$$

$$(\mathscr{C}):\ x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

a) Viết phương trình ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng trục có trục đối xứng là Ox.

b) Viết phương trình ảnh của đường tròn $(\mathscr{C})$ qua phép đối xứng trục có trục đối xứng là Oy.

c) Viết phương trình ảnh của đường tròn ($\mathscr{C}$) qua phép đối xứng trục có trục là đường thẳng $bx - ay = 0$.

24. Gọi m là đường phân giác ngoài tại A của tam giác ABC. Chứng minh rằng với mọi điểm M trên m, chu vi của tam giác MBC không nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

25. Cho elip (E) với hai tiêu điểm F_1 và F_2. Gọi M là một điểm nằm trên (E) nhưng không nằm trên đường thẳng F_1F_2 và m là phân giác ngoài tại đỉnh M của tam giác MF_1F_2. Chứng minh rằng m chỉ cắt (E) tại điểm M duy nhất (đường thẳng m như thế được gọi là *tiếp tuyến* của (E) tại điểm M).

26. Cho hypebol (H) với hai tiêu điểm F_1 và F_2. Gọi M là một điểm nằm trên (H) nhưng không nằm trên đường thẳng F_1F_2 và m là phân giác trong tại đỉnh M của tam giác MF_1F_2. Chứng minh rằng m chỉ cắt (H) tại điểm M duy nhất. (Đường thẳng m như thế được gọi là *tiếp tuyến* của (H) tại điểm M).

27. Cho parabol (P) có tiêu điểm F và đường chuẩn d. Với điểm M trên (P) ta kẻ $MH \perp d$ ($H \in d$) và gọi m là phân giác của góc FMH. Chứng minh rằng m chỉ cắt (P) tại điểm chung duy nhất M. (Đường thẳng m như thế được gọi là *tiếp tuyến* của (P) tại điểm M).

28. Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp và P là một điểm nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' là các điểm đối xứng với điểm P lần lượt qua các đường thẳng AI, BI, CI. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

29. Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là tâm của các đường tròn bàng tiếp trong góc A, góc B và góc C. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A' vuông góc với BC, qua B' vuông góc với AC, qua C' vuông góc với AB đồng quy.