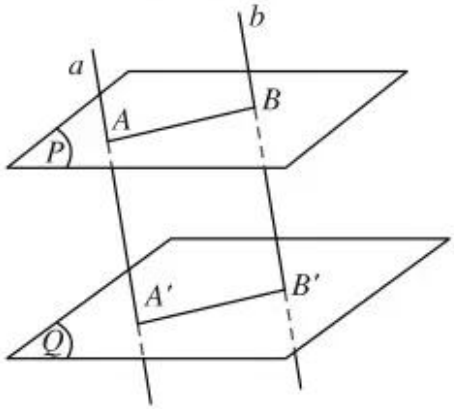
§4. Hai mặt phẳng song song

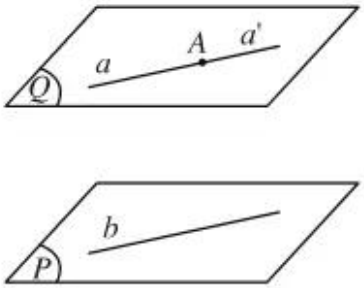
40. a), c).

41. (h.94)

Vì $a \parallel b$ nên có mp(R) ≡ mp(a, b). Mặt phẳng này cắt hai mặt phẳng song song (P) và (Q) theo hai giao tuyến song song AB và $A'B'$. Vậy tứ giác $ABB'A'$ có $AB \parallel A'B'$ và $AA' \parallel BB'$; do đó nó là một hình bình hành. Vậy $AA' = BB'$.



Hình 94



Hình 95

42. (h.95)

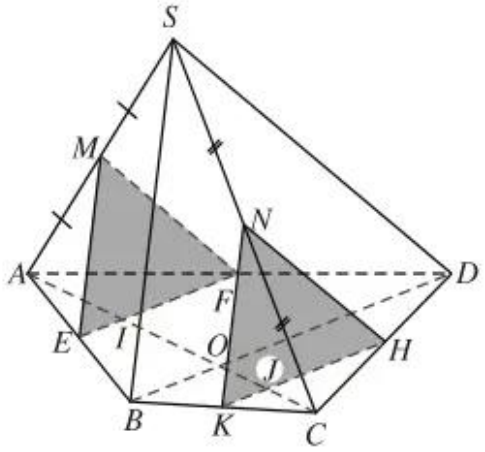
Gọi (Q) là mặt phẳng duy nhất đi qua A và song song với (P). Giả sử a là một đường thẳng bất kì qua A và song song với (P). Ta phải chứng minh đường thẳng a nằm trên (Q).

Vì $a \parallel (P)$ nên có đường thẳng b thuộc (P) sao cho a và b song song. Vậy mp(a, b) cắt (Q) theo giao tuyến a' qua A và song song với b. Từ đó a trùng với a', tức là a nằm trên (Q).

43. a) (h.96)

Giả sử (P) là mặt phẳng qua M và song song với mp(SBD) và E, F là giao điểm của (P) với các cạnh AB và AD. Khi đó, dễ thấy $ME \parallel SB$, $MF \parallel SD$ và $EF \parallel BD$. Vậy thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng qua M và song song với mp(SBD) là tam giác MEF.

Tương tự, thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng qua N và song song với mp(SBD) là tam giác NKH với $NK \parallel SB$, $NH \parallel SD$, $KH \parallel BD$.



Hình 96

b) I, J lần lượt là giao điểm của hai mặt phẳng (MEF), (NKH) với AC cũng chính là giao điểm của EF, KH với AC. Do M là trung điểm của SA và $ME \parallel SB$, $MF \parallel SD$ nên E, F lần lượt là trung điểm của AB và AD. Từ đó suy ra I là trung điểm của AO, (ở đây O là giao điểm của AC và BD).

Vậy $IO = \frac{1}{2}AO$.

Tương tự $OJ = \frac{1}{2}OC$. Vậy $IJ = \frac{1}{2}AC$.

44. (h.97)

• Giả sử $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

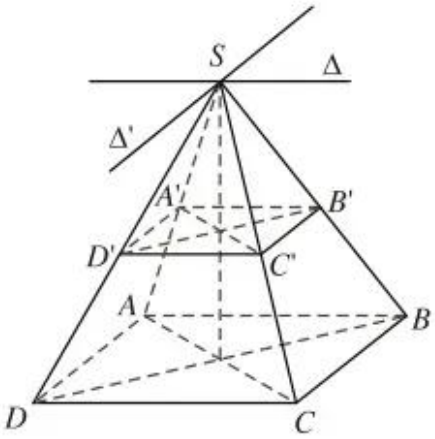
Ta có :

$$A'B' \parallel C'D'$$

$$A'B' \subset (SAB)$$

$$C'D' \subset (SCD)$$

suy ra giao tuyến Δ của (SAB) và (SCD) song song với $A'B'$ và $C'D'$.



Hình 97

Mặt khác

$$\left.\begin{array}{l} AB \,//\, CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \,//\, AB \,//\, CD.$$

Vậy $\quad A'B' \,//\, AB \Rightarrow A'B' \,//\, (ABCD). \qquad (1)$

Chứng minh tương tự, ta có

$$A'D' \,//\, AD \Rightarrow A'D' \,//\, (ABCD). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(P) \,//\, (ABCD)$.

• Giả sử $(P) \,//\, (ABCD)$.

Khi đó hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$ bị mặt phẳng (SAB) cắt theo hai giao tuyến $A'B'$ và AB song song.

Tương tự, ta có :

$$C'D' \,//\, CD$$
$$B'C' \,//\, BC$$
$$A'D' \,//\, AD.$$

suy ra $\quad A'B' \,//\, C'D'$ và $B'C' \,//\, A'D'$.

Vậy tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

45. (h.98)

a) Gọi I', J', K' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng SI và AB, SJ và BC, SK và CA. Khi đó I', J', K' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và CA.

Ta có

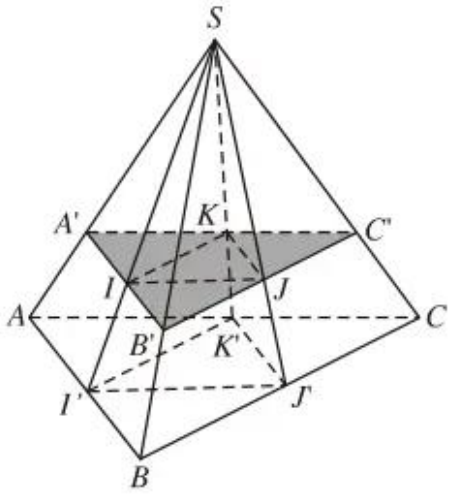
$$\frac{SI}{SI'} = \frac{SK}{SK'} = \frac{SJ}{SJ'} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow IK \,//\, I'K'$, $KJ \,//\, K'J'$

$\Rightarrow \text{mp}(IJK) \,//\, \text{mp}(I'J'K')$.

Mặt khác $\text{mp}(I'J'K') \equiv \text{mp}(ABC)$.

Vậy $\quad (IJK) \,//\, (ABC)$.



Hình 98

b) Ta có $KM \,//\, (ABC)$ khi và chỉ khi KM thuộc $\text{mp}(P)$ qua K và song song với $\text{mp}(ABC)$. Vậy $KM \,//\, (ABC)$ khi và chỉ khi $M \in (P)$.

Gọi A', B', C' lần lượt là các giao điểm của (P) với các cạnh SA, SB, SC. Khi đó $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $C'A' \parallel CA$.

Theo giả thiết M chỉ nằm trong hình chóp $S.ABC$, nên tập hợp các điểm M sao cho $KM \parallel (ABC)$ là tam giác $A'B'C'$.

46. (h.99)

a) • $\left.\begin{array}{l}(P) \parallel (SAB)\\ (P) \cap (ABCD) = MN\\ (SAB) \cap (ABCD) = AB\end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel AB$ (1)

• $\left.\begin{array}{l}(P) \parallel (SAB)\\ (P) \cap (SBC) = MF\\ (SAB) \cap (SBC) = SB\end{array}\right\} \Rightarrow MF \parallel SB$ (2)

• $\left.\begin{array}{l}(P) \parallel (SAB)\\ (P) \cap (SAD) = NE\\ (SAB) \cap (SAD) = SA\end{array}\right\} \Rightarrow NE \parallel SA$ (3)

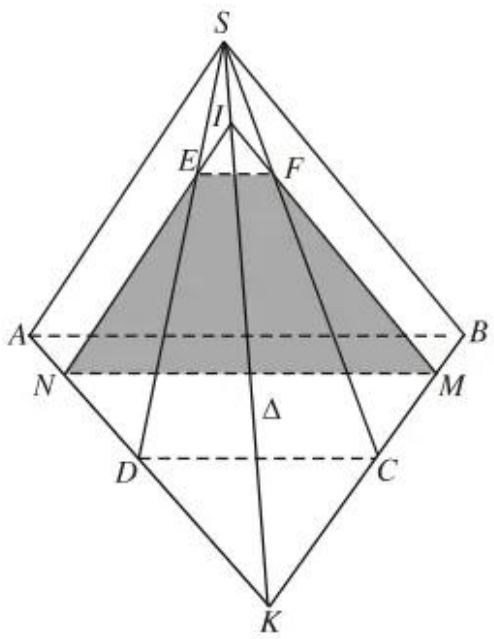
• $\left.\begin{array}{l}(P) \parallel CD\\ CD \subset (SCD)\\ (P) \cap (SCD) = EF\end{array}\right\} \Rightarrow EF \parallel CD$ (4)

Các điểm N, E, F được xác định bởi (1), (2), (3), (4) là giao điểm của (P) với AD, SD, SC có tính chất $EF \parallel MN$. Vậy thiết diện là hình thang $MNEF$.

b) Xét ba mặt phẳng (P), (SAD), (SBC). Ta có :

$$(P) \cap (SAD) = NE$$
$$(P) \cap (SBC) = MF$$
$$(SAD) \cap (SBC) = \Delta.$$

Vậy ba đường thẳng NE, MF, Δ đồng quy tại I (I là giao điểm của NE và MF). Từ đó, điểm I chạy trên đường thẳng Δ cố định.



Hình 99

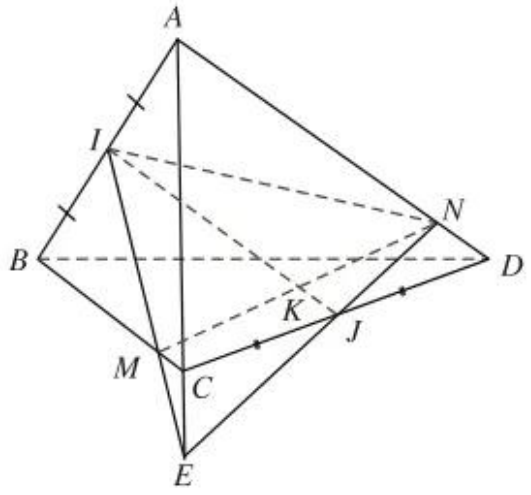
47. (h.100)

a) *Trường hợp M không phải là trung điểm của BC.*

Nối M với I cắt AC tại E. Nối E với J cắt AD tại N. N chính là điểm cần tìm.

Trường hợp M là trung điểm của BC.

Khi đó $IM \parallel AC$ và $(IJM) \parallel AC$. Vậy mp(IJM) cắt mp(ACD) theo giao tuyến $JN \parallel AC$.



Hình 100

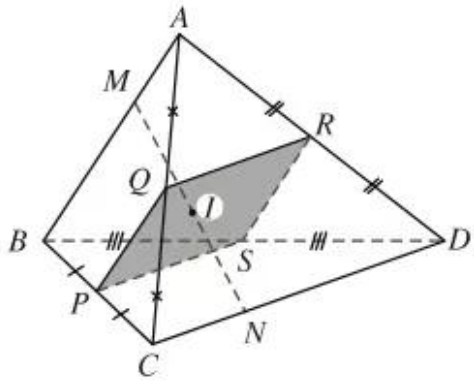
b) Vì $\dfrac{IA}{JD} = \dfrac{IB}{JC} = \dfrac{AB}{DC}$, nên qua IJ, AD, BC có ba mặt phẳng song song (định lí Ta-lét đảo). Ba mặt phẳng này cắt hai đường thẳng AB và NM tại các điểm I, A, B và K, N, M. Vì I là trung điểm của AB nên K là trung điểm của MN (định lí Ta-lét).

48. (h.101)

Phần thuận. Giả sử I là trung điểm của MN. Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của BC, CA, AD và DB. Vì

$$\frac{PB}{IM} = \frac{PC}{IN} = \frac{BC}{MN}$$

nên BM, PI, CN cùng song song với một mặt phẳng, mặt phẳng này song song với AB và CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua P và song song với mặt phẳng đó thì rõ ràng $I \in (\alpha)$. Mặt phẳng này cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là hình bình hành $PQRS$. Vì M chỉ chạy trên đoạn AB, N chỉ di động trên CD nên điểm I luôn nằm trong tứ diện, tức là I luôn nằm trong hình bình hành $PQRS$.



Hình 101

Phần đảo. Lấy một điểm I nằm trong hình bình hành $PQRS$. Qua I có một đường thẳng cắt hai cạnh AB và CD tại M và N (bài tập 32 chương II SGK). Theo định lí Ta-lét thì I là trung điểm của MN.

Vậy tập hợp các điểm I là hình bình hành $PQRS$ (cùng với các điểm trong của nó).

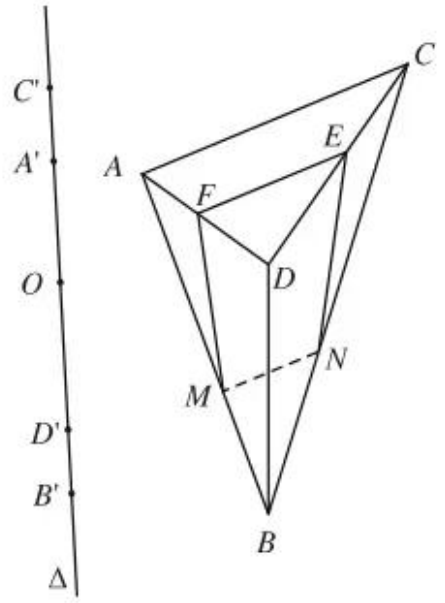
49. (h.102)

a) Ta vẽ một đường thẳng Δ bất kì cắt mặt phẳng $(MNEF)$ tại một điểm O.

Bốn mặt phẳng lần lượt qua A, B, C, D và đồng thời song song với mặt phẳng $(MNEF)$ cắt đường thẳng Δ theo thứ tự tại A', B', C' và D'. Theo định lí Ta-lét ta có

$$\frac{MA}{MB} = \frac{OA'}{OB'},\ \frac{NB}{NC} = \frac{OB'}{OC'},$$

$$\frac{EC}{ED} = \frac{OC'}{OD'},\ \frac{FD}{FA} = \frac{OD'}{OA'}.$$



Hình 102

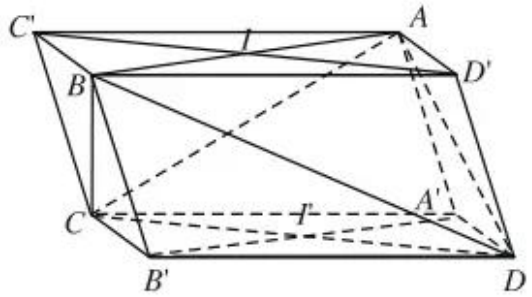
Vậy

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = \frac{OA'}{OB'} \cdot \frac{OB'}{OC'} \cdot \frac{OC'}{OD'} \cdot \frac{OD'}{OA'} = 1.$$

b) Chứng minh như câu b) bài 31 (chương II).

50. (h.103)

Cách 1. Qua mỗi cạnh của hình tứ diện $ABCD$ ta dựng một mặt phẳng song song với cạnh đối diện. Khi đó sáu mặt phẳng vừa dựng sẽ cắt nhau theo một hình hộp cần tìm có sáu mặt bên nằm trên sáu mặt phẳng nói trên.



Hình 103

Cách 2. Qua trung điểm I của AB ta dựng đoạn thẳng $C'D'$ bằng đoạn CD sao cho $C'D' \parallel CD$ và I là trung điểm của $C'D'$. Qua trung điểm I' của CD ta dựng đoạn $A'B'$ bằng đoạn AB sao cho $A'B' \parallel AB$ và I' là trung điểm của $A'B'$. Khi đó rõ ràng $AC'BD'.A'CB'D$ là hình hộp cần dựng.

51. (h.104)

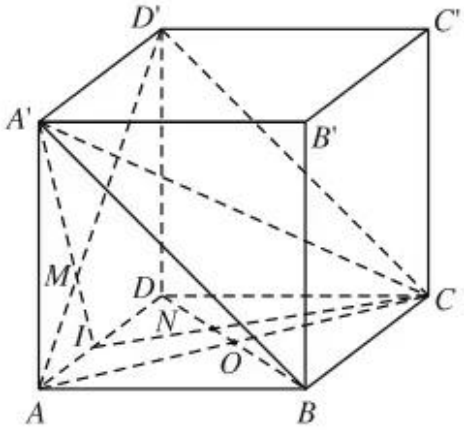
a) *Sử dụng định lí Ta-lét.*

Gọi (P) là mặt phẳng qua AD và song song với mp$(A'D'CB)$ (có (P) vì $AD \parallel A'D'$).

Gọi (Q) là mặt phẳng qua M và song song với mp$(A'D'CB)$. Giả sử (Q) cắt DB tại N'.

Theo định lí Ta-lét, ta có

$$\frac{AM}{AD'} = \frac{DN'}{DB}. \qquad (*)$$



Hình 104

Vì các mặt của hình hộp là hình vuông cạnh a nên

$$AD' = DB = a\sqrt{2}.$$

Từ (*), ta có $AM = DN'$

$$\Rightarrow DN' = DN$$

$$\Rightarrow N' \equiv N$$

$$\Rightarrow MN \subset (Q).$$

Mà (Q) // $(A'D'CB)$ suy ra MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.

Sử dụng định lí Ta-lét đảo.

Từ giả thiết ta có $\dfrac{AM}{DN} = \dfrac{MD'}{NB} = \dfrac{AD'}{DB}$

suy ra AD, MN và $D'B$ luôn song song với một mặt phẳng (định lí Ta-lét đảo). Vậy MN luôn song song với một mặt phẳng (P), mà (P) song song với AD và $D'B$. Có thể chọn mặt phẳng này chính là mp$(A'D'CB)$.

b) Gọi O là giao điểm của DB và AC. Ta có

$$DN = x = \frac{a\sqrt{2}}{3}, DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad DN = \frac{2}{3}DO$$

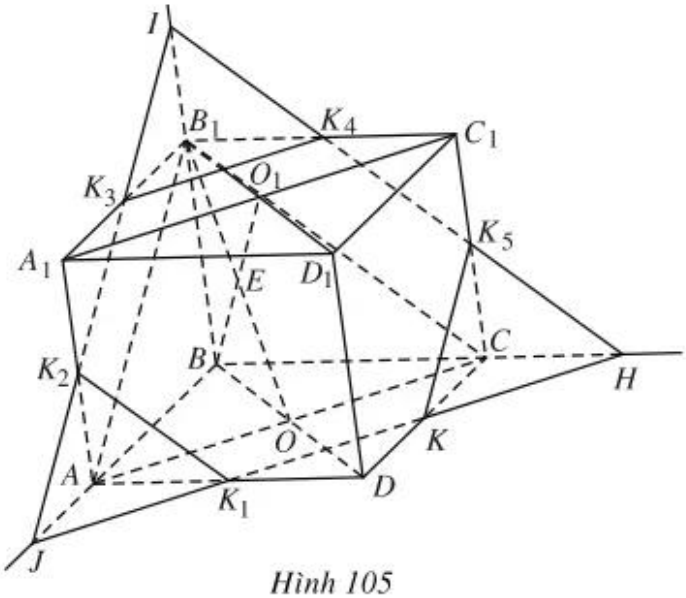
suy ra N là trọng tâm tam giác ADC.

Chứng minh tương tự, ta có M là trọng tâm tam giác $A'AD$. Vậy CN và $A'M$ cắt nhau tại I là trung điểm của AD. Ta có

$$\frac{IM}{IA'} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN \,//\, A'C.$$

52. (h.105)

a) Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Dễ thấy B_1O_1OB là hình bình hành, nên trung điểm E của đường chéo BO_1 cũng là trung điểm của đường chéo OB_1. Do đó E nằm trên OB_1. Mà OB_1 nằm trên mp(ACB_1). Vậy E nằm trên mp(ACB_1).



Hình 105

b) Theo câu a) thì mp(ACB_1) cũng là mp(EAC). Do đó (P) là mặt phẳng qua K và song song với mp(ACB_1). Từ K kẻ đường thẳng song song với AC cắt AD, AB, BC lần lượt tại K_1, J, H. Từ J kẻ đường thẳng song song với AB_1, cắt AA_1, A_1B_1, BB_1 lần lượt tại K_2, K_3, I. Nối I và H cắt B_1C_1, C_1C tại K_4 và K_5.

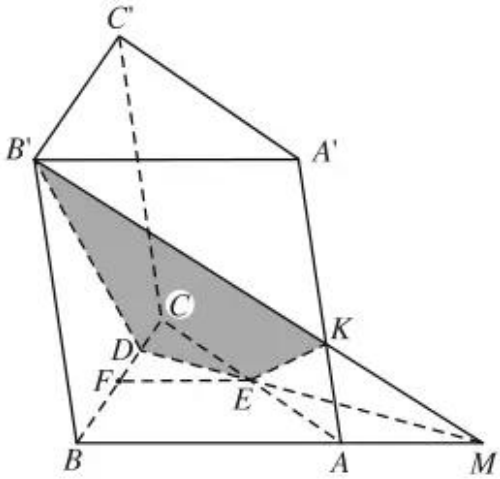
Dễ thấy thiết diện là lục giác $KK_1K_2K_3K_4K_5$ có các cạnh đối song song với nhau.

53. (h.106)

a) Trong mp$(ABB'A')$ nối M với B' cắt AA' tại K.

Trong mp(ABC) nối M với E cắt CB tại D.

Thiết diện là tứ giác $DEKB'$.



Hình 106

b) Kẻ EF // AB ($F \in CB$). Khi đó EF là đường trung bình của tam giác ABC và $EF = \dfrac{AB}{2}$. Xét tam giác DBM ta có

$$\frac{FD}{BD} = \frac{EF}{BM} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra $FD = \dfrac{1}{2}BF = \dfrac{1}{2}FC$, tức D là trung điểm của FC.

Vậy $\dfrac{BD}{CD} = 3$.

54. (h.107)

a) Ta có IJ là đường trung bình của tam giác $C'AB$, nên $IJ \parallel AB$. Mà AB nằm trên mp$(ABB'A')$. Vậy $IJ \parallel (ABB'A')$.

Chứng minh tương tự, ta có

$JK \parallel (ACC'A')$, $IK \parallel (BCC'B')$.

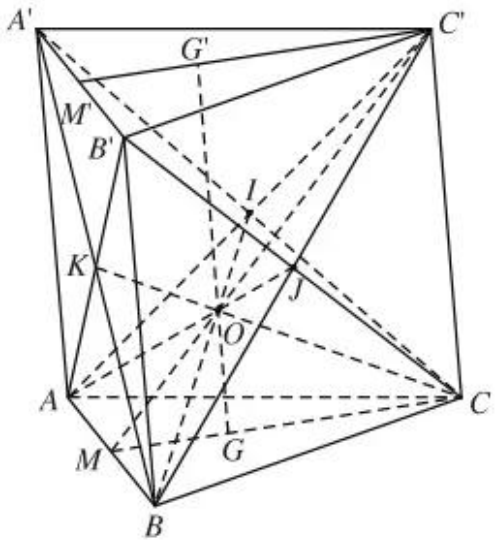
b) Xét ba mặt phẳng $(C'AB)$, $(A'BC)$, $(B'AC)$. Ta có

$(C'AB) \cap (A'BC) = BI$

$(C'AB) \cap (B'AC) = AJ$

$(B'AC) \cap (A'BC) = CK$.

Vậy theo định lí giao tuyến của ba mặt phẳng thì ba đường thẳng BI, AJ, CK đồng quy tại một điểm.



Hình 107

c) Theo câu a), ta có

$$\left.\begin{array}{l} IJ \parallel AB \\ JK \parallel AC \end{array}\right\} \Rightarrow (IJK) \parallel (ABC).$$

d) Dễ thấy O là trọng tâm tam giác $C'AB$. Gọi M là giao điểm của $C'O$ với AB thì M là trung điểm của AB. Vậy ba điểm M, G, C thẳng hàng.

Vì O và G lần lượt là trọng tâm của hai tam giác $C'AB$ và CAB nên ta có

$$\frac{MO}{MC'} = \frac{MG}{MC} = \frac{1}{3} \Rightarrow OG \parallel CC'. \qquad (1)$$

Chứng minh tương tự $\quad OG' \parallel CC'$. $\qquad$ (2)

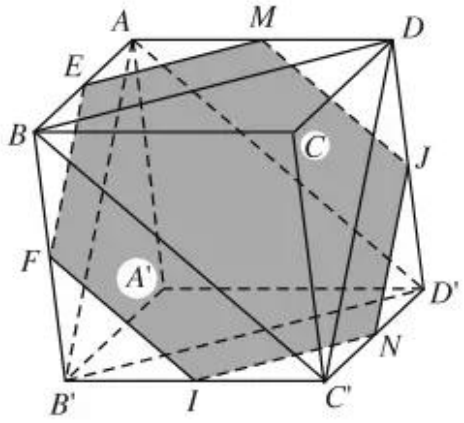
Từ (1) và (2) suy ra ba điểm O, G, G' thẳng hàng.

55. (h.108)

a) Theo giả thiết, ta có

$$\frac{AM}{MD} = \frac{D'N}{NC'}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{D'N} = \frac{MD}{NC'} = \frac{AD}{D'C'}.$$



Hình 108

Theo định lí Ta-lét đảo ta có MN, AD', DC' cùng song song với một mặt phẳng (P). Mặt phẳng (P) song song với AD' và DC'. Nhưng $AD' \parallel BC'$ nên mặt phẳng (P) song song với mp$(C'BD)$. Từ đó, ta có $MN \parallel (C'BD)$.

b) Từ M kẻ $ME \parallel BD$, cắt AB tại E ; từ E kẻ đường thẳng $EF \parallel AB'$, cắt BB' tại F ; từ F kẻ đường thẳng $FI \parallel BC'$, cắt $B'C'$ tại I ; từ N kẻ đường thẳng $NJ \parallel C'D$ cắt $D'D$ tại J. Dễ thấy thiết diện là lục giác $MEFINJ$ có các cạnh đối lần lượt song song với ba cạnh của tam giác $C'BD$.

56. (h.109)

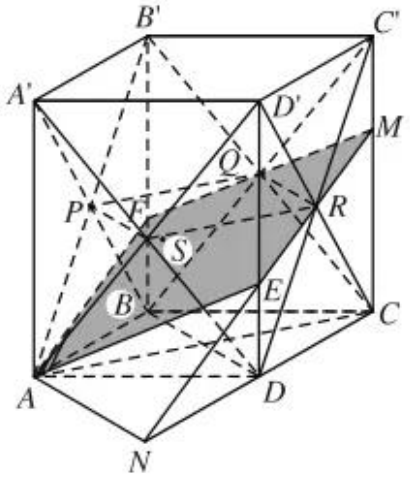
a) Dễ thấy QR là đường trung bình của tam giác $C'BD$ nên $QR \parallel BD$. Mà BD nằm trên mp$(ABCD)$, suy ra

$$QR \parallel (ABCD). \qquad (1)$$

Lí luận tương tự ta có

$$PQ \parallel (ABCD). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(PQRS) \parallel (ABCD)$.



Hình 109

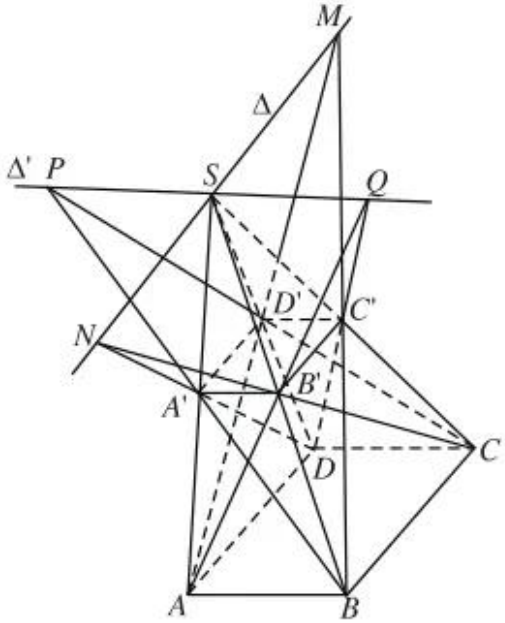
b) Theo câu a), ta có $QR \parallel (ABCD)$ suy ra mặt phẳng (AQR) cắt mp$(ABCD)$ theo một giao tuyến song song với BD. Giao tuyến này cắt CD tại N. Nối N với R cắt DD' và CC' lần lượt tại E và M. Nối M với Q cắt BB' tại F. Dễ thấy thiết diện là hình bình hành $AEMF$.

c) Do $AN \parallel BD$ suy ra D là trung điểm của CN, dễ thấy

$$\Delta EDR = \Delta MC'R \Rightarrow DE = MC'.$$

Mặt khác $DE \parallel CM$

suy ra $\dfrac{DE}{CM} = \dfrac{ND}{NC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{MC'}{MC} = \dfrac{1}{2}$.



Hình 110

57. (h.110) Gọi S là điểm đồng quy của các cạnh AA', BB', CC', DD'. Vì BC song song với AD nên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng $(BB'C'C)$, $(AA'D'D)$ đi

qua S và song song với BC. Rõ ràng M, N là hai điểm chung của hai mặt phẳng nói trên. Do đó M, N đều thuộc Δ. Lí luận tương tự , hai điểm P, Q thuộc giao tuyến Δ' của hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$ (giao tuyến này đi qua S và song song với AB). Vậy bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên mp(Δ, Δ').