

§4. Hai mặt phẳng song song

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Hai mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.*
2. *Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a và b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).*
3. *Qua một điểm ngoài một mặt phẳng có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.*
4. *Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).*
5. *Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.*
6. *Định lí Ta-lét : Ba mặt phẳng đối một song song chấn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*
7. *Định lí Ta-lét đảo : Giả sử trên hai đường thẳng a và a' chéo nhau lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Khi đó, ba đường thẳng AA' , BB' , CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

8. *Hình lăng trụ có hai đáy là hai đa giác nằm trên hai mặt phẳng song song ; các mặt bên đều là hình bình hành ; các cạnh bên bằng nhau và đối một song song.*
9. *Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành ; bốn đường chéo của hình hộp đồng quy tại trung điểm của mỗi đường, điểm đó gọi là tâm của hình hộp.*
10. *Hình chóp cụt có hai đáy nằm trên hai mặt phẳng song song ; các mặt bên đều là hình thang ; các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.*

II - ĐỀ BÀI

40. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

- a) *Nếu một đường thẳng nằm trên một trong hai mặt phẳng song song thì nó song song với mặt phẳng còn lại.*

b) Nếu một đường thẳng nằm trên một trong hai mặt phẳng song song thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng còn lại.

c) Các mặt đối diện của một hình hộp nằm trên những mặt phẳng song song.

41. Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) ; hai đường thẳng song song a và b . Đường thẳng a lần lượt cắt (P), (Q) tại A, A' ; đường thẳng b lần lượt cắt (P), (Q) tại B, B' . Chứng minh rằng hai đoạn thẳng AA' và BB' bằng nhau.
42. Cho một mặt phẳng (P) và một điểm A nằm ngoài (P). Chứng minh rằng tất cả những đường thẳng đi qua A và song song với (P) đều cùng nằm trong một mặt phẳng (Q) song song với (P).
43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một tứ giác lồi. M là trung điểm của cạnh bên SA , N là trung điểm của cạnh bên SC .
- Xác định các thiết diện của hình chóp khi cắt bởi các mặt phẳng lần lượt qua M, N và song song với $mp(SBD)$.
 - Gọi I, J là giao điểm của hai mặt phẳng nói trên với AC . Chứng minh rằng $IJ = \frac{1}{2} AC$.
44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' . Chứng minh rằng tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành khi và chỉ khi mặt phẳng (P) song song với $mp(ABCD)$.
45. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCA .
- Chứng minh rằng $(IJK) // (ABC)$.
 - Tìm tập hợp các điểm M nằm trong hình chóp $S.ABC$ sao cho KM song song với $mp(ABC)$.
46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB // CD$). Điểm M thuộc cạnh BC không trùng với B và C .
- Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua M và song song với $mp(SAB)$. Thiết diện là hình gì ?
 - Gọi E và F lần lượt là giao điểm của $mp(P)$ với SD và SC . Chứng minh rằng giao điểm I của NE và MF chạy trên một đường thẳng cố định.
47. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Một mặt phẳng qua IJ cắt các cạnh AD và BC lần lượt tại N và M .

- a) Cho trước điểm M , nêu cách dựng điểm N .
- b) Gọi K là giao điểm của MN và IJ . Chứng minh rằng K là trung điểm của MN .
- 48.** Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên hai cạnh AB và CD . Tìm tập hợp trung điểm I của MN .
- 49.** Hãy dùng định lí Ta-lết để giải bài tập 31 (chương II).
- 50.** Cho tứ diện $ABCD$. Hãy dựng một hình hộp ngoại tiếp tứ diện đó (tức là dựng một hình hộp sao cho mỗi cạnh của tứ diện là đường chéo của một mặt của hình hộp).
- 51.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh bằng a . Các điểm M, N lần lượt nằm trên AD' , DB sao cho $AM = DN = x$ ($0 < x < a\sqrt{2}$).
- a) Chứng minh rằng khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.
- b) Chứng minh rằng khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN // A'C$.
- 52.** Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O_1 là tâm của hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$; K là trung điểm của CD ; E là trung điểm của BO_1 .
- a) Chứng minh rằng E nằm trên $\text{mp}(ACB_1)$.
- b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua điểm K và song song với mặt phẳng (EAC).
- 53.** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Trên đường thẳng BA lấy một điểm M sao cho A nằm giữa B và M , $MA = \frac{1}{2}AB$.
- a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua M, B' và trung điểm E của AC .
- b) Tính tỉ số $\frac{BD}{CD}$ ($D = BC \cap \text{mp}(MB'E)$).
- 54.** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là tâm của các hình bình hành $ACC'A'$, $BCC'B'$, $ABB'A'$.
- a) Chứng minh rằng: $IJ // (ABB'A')$, $JK // (ACC'A')$, $IK // (BCC'B')$.
- b) Ba đường thẳng AJ, CK, BI đồng quy tại một điểm O .
- c) Mặt phẳng (IJK) song song với mặt đáy của hình lăng trụ.

- d) Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng ba điểm G, O, G' thẳng hàng.
- 55.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Điểm M thuộc cạnh AD , điểm N thuộc cạnh $D'C'$ sao cho $AM : MD = D'N : NC'$.
- Chứng minh rằng MN song song với $(C'BD)$.
 - Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mp(P) qua MN và song song với mp($C'BD$).
- 56.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi P, Q, R, S lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$.
- Chứng minh rằng RQ song song với $(ABCD)$, $(PQRS)$ song song $(ABCD)$.
 - Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (AQR) .
 - Gọi M là giao điểm của cạnh CC' với mp(AQR). Tính tỉ số $\frac{MC}{MC'}$.
- 57.** Cho hình chóp cụt tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$, có các cạnh bên là AA', BB', CC', DD' và đáy lớn $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AD' và BC' , CB' và DA' , BA' và CD' , AB' và DC' . Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.