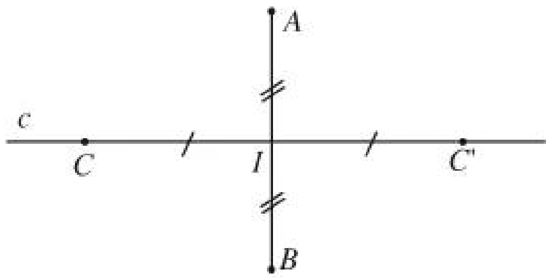
§4. Phép quay và phép đối xứng tâm

30. (h.16)

Vì F biến A thành B và biến B thành A nên F biến trung điểm I của AB thành chính nó. Nếu gọi c là đường trung trực của AB thì F biến c thành chính nó. Trên c lấy hai điểm C và C' đối xứng với nhau qua I thì hoặc F biến C thành C hoặc F biến C thành C'.



Hình 16

Nếu F biến C thành C thì F biến tam giác ABC thành tam giác BAC. Vậy F chính là phép đối xứng trục $Đ_c$.

Nếu F biến C thành C' thì F biến tam giác ABC thành tam giác BAC'. Vậy F chính là phép đối xứng tâm $Đ_I$.

31. (h.17)

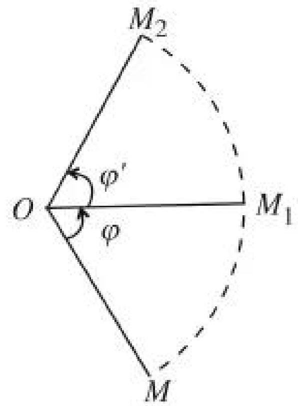
Giả sử Q và Q' là hai phép quay có tâm O với góc quay lần lượt là φ và φ', còn F là hợp thành của Q và Q'. Với mọi điểm M khác O, giả sử Q biến M thành M_1 và Q' biến M_1 thành M_2. Khi đó, ta có

$OM = OM_1 = OM_2$

$(OM, OM_1) = \varphi$, $(OM_1, OM_2) = \varphi'$.

Suy ra $OM = OM_2$

và $(OM, OM_2) = (OM, OM_1) + (OM_1, OM_2)$
$= \varphi + \varphi'$.



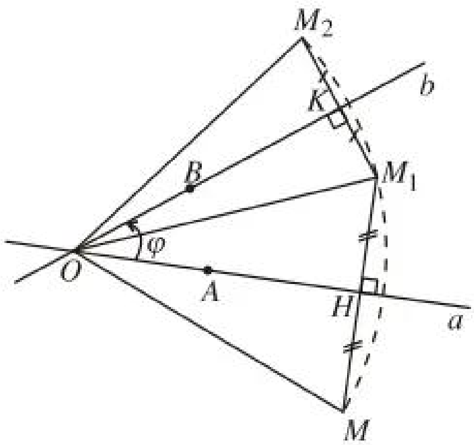
Hình 17

Vậy hợp thành F là phép quay tâm O góc quay bằng $\varphi + \varphi'$.

Từ đó suy ra : *Hợp thành của một số hữu hạn phép quay có tâm trùng nhau là một phép quay với tâm đó và có góc quay bằng tổng các góc quay của các phép quay đã cho.*

32. a) (h.18)

Giả sử cho hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ có trục a và b cắt nhau tại O,



Hình 18

còn F là hợp thành của $Đ_a$ và $Đ_b$. Lấy hai điểm A, B khác O lần lượt nằm trên a, b sao cho góc AOB không tù và đặt $\varphi = (OA, OB)$.

(Chú ý rằng khi đó $|\varphi| = \widehat{AOB}$ là góc hợp bởi hai đường thẳng a và b).

Với mọi điểm M khác O, giả sử $Đ_a$ biến M thành M_1 và $Đ_b$ biến M_1 thành M_2. Khi đó, nếu gọi H và K lần lượt là trung điểm của MM_1 và M_1M_2 thì ta có

$$OM = OM_1 = OM_2$$

và
$$\begin{aligned}(OM, OM_2) &= (OM, OM_1) + (OM_1, OM_2)\\ &= 2(OH, OM_1) + 2(OM_1, OK)\\ &= 2(OH, OK) = 2\varphi.\end{aligned}$$

Vậy phép hợp thành F là phép quay tâm O góc quay 2φ.

b) Giả sử Q là phép quay tâm O góc quay φ. Ta lấy đường thẳng a nào đó đi qua O và b là ảnh của a qua phép quay tâm O góc quay $\dfrac{\varphi}{2}$ thì hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ chính là phép quay Q (theo câu a)). Cố nhiên có thể chọn a bằng nhiều cách khác nhau.

c) Nếu F là hợp thành của $2n$ phép đối xứng có trục đối xứng đồng quy tại O thì F là hợp thành của n phép quay có tâm O và do đó F là một phép quay.

d) Giả sử F là hợp thành của $2n + 1$ phép đối xứng trục có các trục đều đi qua O. Gọi $Đ_a$ là phép đối xứng đầu tiên, thì $2n$ phép đối xứng trục còn lại có hợp thành là phép quay Q tâm O. Ta xem Q là hợp thành của hai phép đối xứng trục, trong đó phép thứ nhất là $Đ_a$ và phép thứ hai là $Đ_b$. Như vậy, F là hợp thành của ba phép đối xứng trục : $Đ_a$, $Đ_a$ và $Đ_b$. Vậy F chính là phép đối xứng trục $Đ_b$.

33. Phép đối xứng qua điểm I biến A thành C. Vậy quỹ tích C là đường tròn đối xứng với (O) qua I.

Phép quay Q tâm I góc quay 90^o biến A thành B (hoặc thành D), phép quay Q' tâm I góc quay -90^o biến A thành D (hoặc thành B). Vậy quỹ tích B và D là ảnh của (O) qua hai phép quay đó.

34. Phép quay tâm G góc quay 120^o biến A thành B (hoặc C) và phép quay tâm G góc quay 240^o biến A thành C (hoặc thành B). Vậy quỹ tích B và C là ảnh của đường thẳng a qua hai phép quay nói trên.

35. Gọi D là trung điểm của MM_3 thì $ABCD$ là hình bình hành. Do đó, điểm D cố định. Vì phép đối xứng qua điểm D biến M thành M_3 nên quỹ tích M_3 là ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng đó.

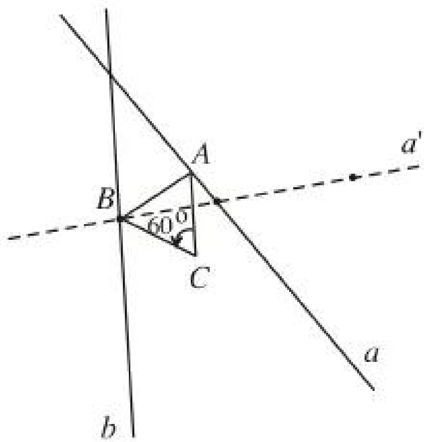
36. (h.19)

Giả sử đã dựng được tam giác đều ABC thoả mãn điều kiện đã cho. Khi đó, góc

$$(CA, CB) = \pm 60^{\circ}.$$

Nếu $(CA, CB) = 60^{\circ}$ thì phép quay Q tâm C góc quay 60° sẽ biến A thành B và biến đường thẳng a thành đường thẳng a' đi qua B. Vậy ta có thể xác định điểm B như sau :

Dựng đường thẳng a' là ảnh của đường thẳng a qua phép quay Q, rồi lấy giao điểm B của a' và b. Điểm A được xác định như là ảnh của B qua phép quay tâm C góc quay -60°.



Hình 19

Làm tương tự cho trường hợp $(CA, CB) = -60^{\circ}$.

Bài toán có ít nhất một nghiệm hình, có thể có vô số nghiệm hình.

37. Giả sử đã dựng được tam giác đều MNP thoả mãn điều kiện của bài toán. Nếu dùng phép quay Q tâm M góc quay 60° thì N biến thành P và hình vuông $ABCD$ biến thành hình vuông $A'B'C'D'$ mà P cũng nằm trên hình vuông này. Từ đó, suy ra cách dựng.

38. Nếu F là phép dời hình biến tam giác đều ABC thành chính nó thì F phải biến đỉnh của tam giác thành đỉnh của tam giác đó. Ta có thể kí hiệu tam giác với đỉnh A, B, C theo sáu cách khác nhau :

$$ABC, ACB, BCA, BAC, CAB, CBA$$

cho nên ta có sáu phép dời hình biến tam giác ABC thành một trong sáu tam giác kể trên. Cụ thể là :

a) Phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác ABC : Đó là phép đồng nhất.

b) Phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác ACB : Đó là phép đối xứng qua đường trung trực của cạnh BC.

c) Phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác BCA : Đó là phép quay tâm O (tâm của tam giác đều) với góc quay 120°.

d) Phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác BAC : Đó là phép đối xứng qua trung trực của cạnh AB.

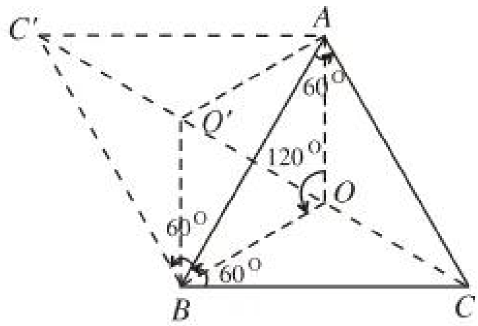
e) Phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác CAB : Đó là phép quay quanh O với góc quay -120^{o}.

f) Phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác CBA : Đó là phép đối xứng qua trung trực của cạnh AC.

39. (h.20)

a) Ta gọi C' là điểm đối xứng với điểm C qua AB. Phép quay Q_B biến A thành C', B thành B và biến C thành A. Phép quay Q_A biến C' thành B, biến B thành C và biến A thành A. Vậy hợp thành F là phép dời hình biến ba điểm A, B, C lần lượt thành ba điểm B, C, A.

b) Từ câu a), suy ra : Nếu gọi O là tâm tam giác đều ABC thì F là phép quay tâm O góc quay 120^{o}.



Hình 20

c) Chứng minh tương tự, phép hợp thành của Q_A và Q_B là phép quay tâm O' góc quay 120^{o}, trong đó O' là tâm của tam giác đều ABC'.

40. a) Hợp thành của $Đ_{BC}$ và $Đ_{AB}$ là phép quay Q_B tâm B góc quay 120^{o}.

b) Hợp thành của $Đ_{AB}$ và $Đ_{AC}$ là phép quay Q_A tâm A góc quay 120^{o}.

c) Hợp thành F của Q_B và Q_A là hợp thành của bốn phép đối xứng theo thứ tự là : $Đ_{BC}$, $Đ_{AB}$, $Đ_{AB}$, $Đ_{AC}$. Vì hợp thành của $Đ_{AB}$ và $Đ_{AB}$ là phép đồng nhất nên F là hợp thành của hai phép $Đ_{BC}$ và $Đ_{AC}$. Vậy F là phép quay tâm C với góc quay 240^{o} (hoặc có thể nói là góc quay -120^{o}).

41. Nếu F là phép dời hình biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó thì F biến tâm O của hình vuông thành chính nó. Vì F biến đỉnh A thành một trong các đỉnh A, B, C, D nên ta có các trường hợp sau :

a) F biến A thành chính nó : Khi đó F hoặc là phép đồng nhất, hoặc là phép đối xứng qua đường thẳng OA.

b) F biến A thành B : Khi đó F hoặc là phép đối xứng qua trung trực cạnh AB, hoặc là phép quay tâm O góc quay (OA, OB).

c) F biến A thành C : Khi đó F hoặc là phép đối xứng qua đường thẳng BD, hoặc là phép đối xứng tâm O.

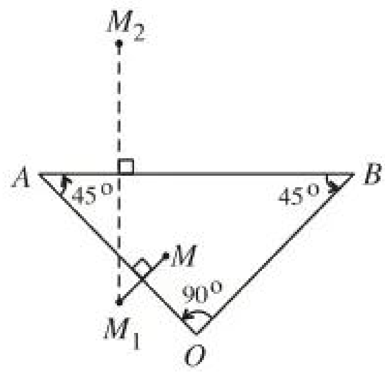
d) F biến A thành D : Khi đó F hoặc là phép đối xứng qua trung trực cạnh AD hoặc là phép quay với góc quay $(OA, OD) = 3(OA, OB)$.

42. (h.21)

Lấy điểm O sao cho tam giác OAB là tam giác vuông cân với góc

$(AO, AB) = (BA, BO) = 45^o$.

Khi đó, Q_A là hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_{AO}$ và $Đ_{AB}$, còn Q_B là hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_{AB}$ và $Đ_{BO}$. Vậy F là hợp thành của bốn phép đối xứng trục theo thứ tự : $Đ_{AO}$, $Đ_{AB}$, $Đ_{AB}$, $Đ_{BO}$, tức cũng là hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_{AO}$ và $Đ_{BO}$. Vì AO vuông góc với BO nên F là phép quay tâm O góc quay 180^o, tức là phép đối xứng qua điểm O. Chú ý rằng có thể xác định điểm O bởi điều kiện : Tam giác OAB vuông cân và $(OB, OA) = 90^o$.



Hình 21

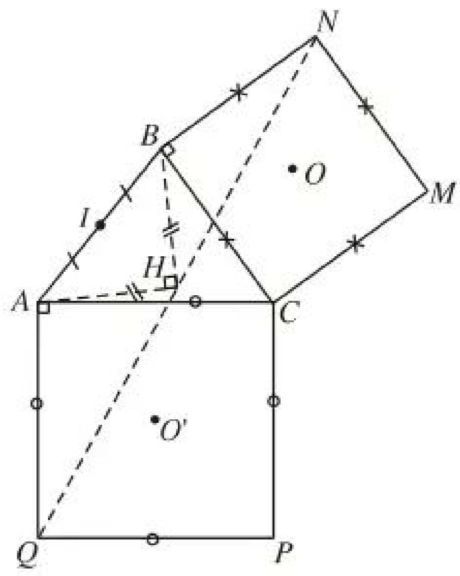
Tương tự, F' là phép đối xứng qua tâm O', sao cho $O'AB$ là tam giác vuông cân mà $(OA, OB) = 90^o$.

43. (h.22)

a) Q_A và Q_B lần lượt là các phép quay tâm A, B với góc quay

$(AQ, AC) = (BC, BN) = 90^o$.

Theo bài 42 ta có : Hợp thành của hai phép đó là phép đối xứng qua điểm H xác định. Vì phép đối xứng tâm H biến Q thành N nên H là trung điểm của đoạn thẳng NQ, tức là đường thẳng NQ luôn luôn đi qua điểm H cố định.



Hình 22

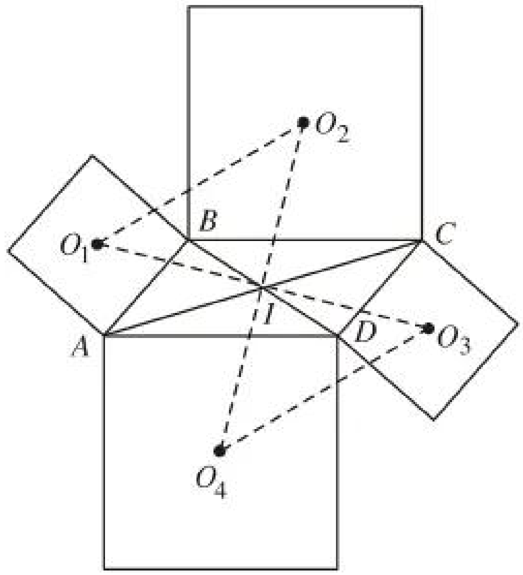
b) Gọi Q_O và $Q_{O'}$ là các phép quay có góc quay 90^o với tâm quay tương ứng là O và O' thì phép hợp thành F của chúng biến B thành A. Nhưng vì F là phép đối xứng tâm, nên tâm đối xứng là trung điểm I của AB. Suy ra tam giác IOO' vuông cân tại đỉnh I.

Cách giải khác

Phép quay tâm C góc quay 90^o biến A thành P và biến M thành B. Bởi vậy, ta có $AM = PB$ và $AM \perp PB$. Chú ý rằng IO là đường trung bình của tam giác ABM và IO' là đường trung bình của tam giác APB nên ta suy ra IOO' là tam giác vuông cân.

44. (h.23)

Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 là tâm các hình vuông có cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DA. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$ thì I là tâm đối xứng của hình gồm hình bình hành và bốn hình vuông đã cho. Bởi vậy I là trung điểm của O_1O_3 và O_2O_4. Nói cách khác $O_1O_2O_3O_4$ là hình bình hành. Xét tam giác ABC, theo kết quả bài tập 43 ta có IO_1O_2 là tam giác vuông cân. Vậy $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

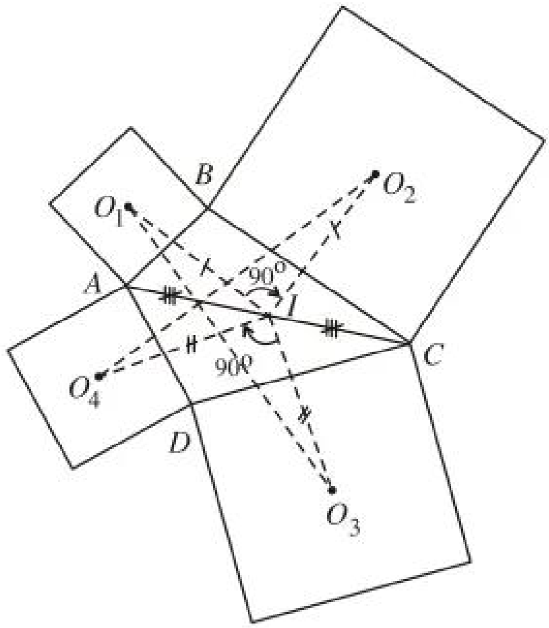


Hình 23

45. (h.24)

Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 là tâm các hình vuông có cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DA và I là trung điểm của đoạn thẳng AC. Xét tam giác ABC và tam giác ACD thì theo kết quả bài tập 43 ta có IO_1O_2 và IO_4O_3 là những tam giác vuông cân. Từ đó, suy ra phép quay tâm I góc quay -90^o biến O_1 thành O_2 và biến O_3 thành O_4. Do đó, ta có

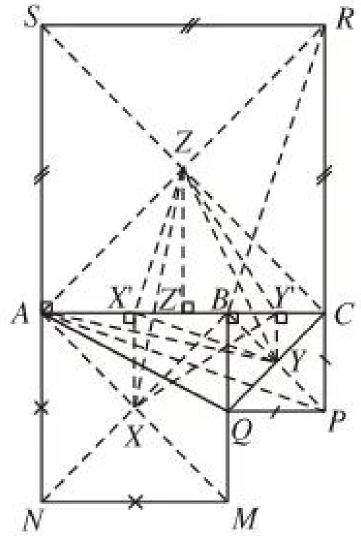
$O_1O_3 = O_2O_4$ và $O_1O_3 \perp O_2O_4$.



Hình 24

46. (h.25)

a) Phép quay tâm B góc quay 90^o biến A thành M và Q thành C. Bởi vậy, biến đoạn thẳng AQ thành MC. Suy ra hai đoạn thẳng AQ, MC bằng nhau và vuông góc với nhau. Chú ý rằng $Z'X$ là đường trung bình của tam giác AMC, còn $Z'Y$ là đường trung bình của tam giác CAQ nên tam giác $Z'XY$ vuông cân tại đỉnh Z'.



Hình 25

Dùng phép quay tâm C góc quay 90^o ta chứng minh được hai đoạn thẳng PA, BR bằng nhau và vuông góc với nhau. Suy ra $X'YZ$ là tam giác vuông cân tại X'. Tương tự cũng chứng minh được $Y'XZ$ là tam giác vuông cân tại Y'.

b) Phép quay tâm X' góc quay 90^o biến điểm A thành điểm X và biến điểm Y thành điểm Z. Suy ra hai đoạn thẳng AY, XZ bằng nhau và vuông góc với nhau.