

§4. Phép quay và phép đối xứng tâm

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Trong mặt phẳng, cho điểm O và góc lượng giác φ . Phép quay $Q_{(O, \varphi)}$ tâm O góc quay φ là phép biến hình biến điểm O thành chính nó và biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM = OM'$ và $(OM, OM') = \varphi$.

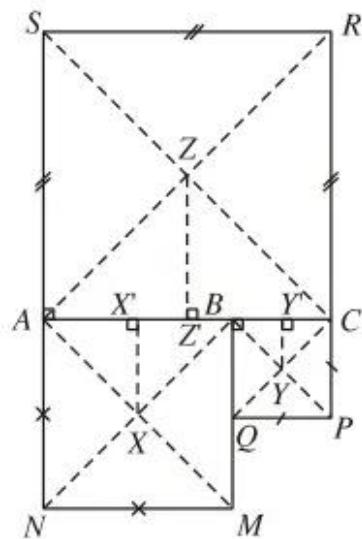
2. *Phép quay là một phép dời hình.*
3. Khi $\varphi = \pi$ thì phép quay $Q_{(O, \pi)}$ gọi là phép đối xứng qua điểm O , và kí hiệu là D_O . Phép đối xứng qua điểm O còn gọi là phép đối xứng tâm.
4. Phép đối xứng qua điểm O biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$.

II - ĐỀ BÀI

30. Cho hai điểm A, B phân biệt. Chứng minh rằng nếu phép dời hình F biến A thành B và biến B thành A thì F là phép đối xứng trực hoặc phép đối xứng tâm.
31. Chứng minh rằng hợp thành của một số phép quay với các tâm quay trùng nhau là một phép quay.
32. Chứng minh rằng :
 - a) Hợp thành của hai phép đối xứng trực có trực cắt nhau là một phép quay.
 - b) Mỗi phép quay đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trực có trực cắt nhau, bằng nhiều cách.
 - c) Hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng trực có các trực đối xứng đồng quy là một phép quay.
 - d) Hợp thành của một số lẻ các phép đối xứng trực có các trực đối xứng đồng quy là một phép đối xứng trực.
33. Cho đường tròn (O) và một điểm I không nằm trên đường tròn. Với mỗi điểm A thay đổi trên đường tròn, ta xét hình vuông $ABCD$ có tâm là I . Tìm quỹ tích các điểm B, C, D .
34. Cho đường thẳng a và một điểm G không nằm trên a . Với mỗi điểm A nằm trên a ta dựng tam giác đều ABC có tâm là G . Tìm quỹ tích hai điểm B và C khi A chạy trên a .
35. Cho đường tròn (O) và tam giác ABC . Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O) . Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua A , M_2 là điểm đối xứng của M_1 qua B , M_3 là điểm đối xứng của M_2 qua C . Tìm quỹ tích của điểm M_3 .
36. Cho hai đường thẳng a, b phân biệt và điểm C không nằm trên chúng. Hãy xác định hai điểm A, B lần lượt nằm trên a và b sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

37. Cho hình vuông $ABCD$ và một điểm M nằm trên một cạnh của hình vuông. Tìm các điểm N, P nằm trên cạnh của hình vuông sao cho tam giác MNP là tam giác đều.
38. Cho tam giác đều ABC với $(AB, AC) = (BC, BA) = (CA, CB) = 60^\circ$. Hãy kể ra các phép dời hình biến tam giác ABC thành chính nó.
39. Cho tam giác đều ABC với $(AB, AC) = (BC, BA) = (CA, CB) = 60^\circ$. Gọi Q_A, Q_B là các phép quay góc 60° lần lượt có tâm là A và B . Gọi F là hợp thành của Q_B và Q_A .
- Phép F biến các điểm A, B, C thành các điểm nào ?
 - Phép F là phép gì ?
 - Phép hợp thành của Q_A và Q_B là phép gì ?
40. Cho tam giác đều ABC với $(AB, AC) = (BC, BA) = (CA, CB) = 60^\circ$. Gọi D_{AB}, D_{BC} và D_{AC} là các phép đối xứng lần lượt qua các đường thẳng AB, BC, AC .
- Hợp thành của D_{BC} và D_{AB} là phép gì ?
 - Hợp thành của D_{AB} và D_{AC} là phép gì ?
 - Gọi Q_A và Q_B là các phép quay góc 120° với tâm lần lượt tại A và B . Hợp thành của Q_B và Q_A là phép gì ?
41. Hãy chỉ ra tất cả các phép dời hình biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó.
42. Cho hai phép quay Q_A và Q_B có tâm quay là A và B (phân biệt) và có cùng góc quay 90° . Gọi F là hợp thành của Q_A và Q_B , F' là hợp thành của Q_B và Q_A . Hãy chứng tỏ rằng F và F' là những phép đối xứng tâm và nêu rõ cách xác định tâm đối xứng của các phép đó.
43. Vẽ phía ngoài của tam giác ABC vẽ các hình vuông $BCMN$ và $ACPQ$ có tâm O và O' .
- Chứng minh rằng khi cố định hai điểm A, B và cho điểm C thay đổi thì đường thẳng NQ luôn luôn đi qua một điểm cố định.
 - Gọi I là trung điểm AB . Chứng minh rằng IOO' là tam giác vuông cân.
44. Vẽ phía ngoài của hình bình hành $ABCD$ dựng các hình vuông có cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng bốn tâm của bốn hình vuông đó là đỉnh của một hình vuông.

45. Về phía ngoài của tứ giác lồi $ABCD$ dựng các hình vuông có cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng tâm của bốn hình vuông đó làm thành một tứ giác có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau.
46. Trên hình 1 có ba điểm thẳng hàng A, B, C và ba hình vuông $ABMN, BCPQ, ACRS$ với tâm lần lượt là X, Y, Z . Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, AC .
- Chứng minh rằng các tam giác $Z'XY, XYZ, YXZ$ là những tam giác vuông cân.
 - Chứng minh rằng hai đoạn thẳng AY, XZ bằng nhau và vuông góc với nhau, cũng như thế đối với hai đoạn thẳng BZ, XY và CX, YZ .



Hình 1