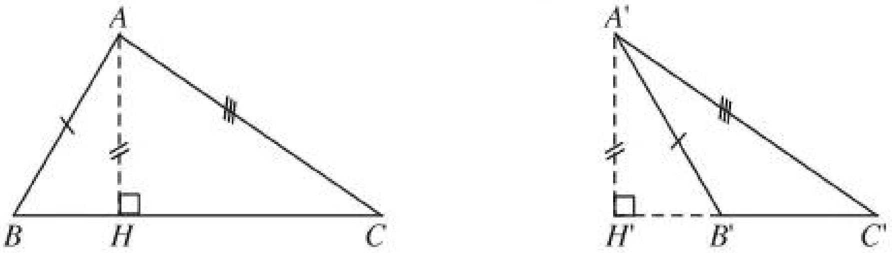
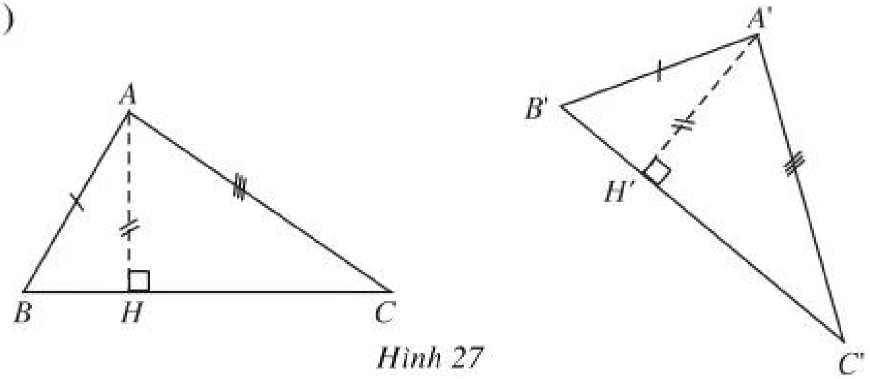
§5. Hai hình bằng nhau

47. a) Có thể không bằng nhau (xem hình 26).



Hình 26

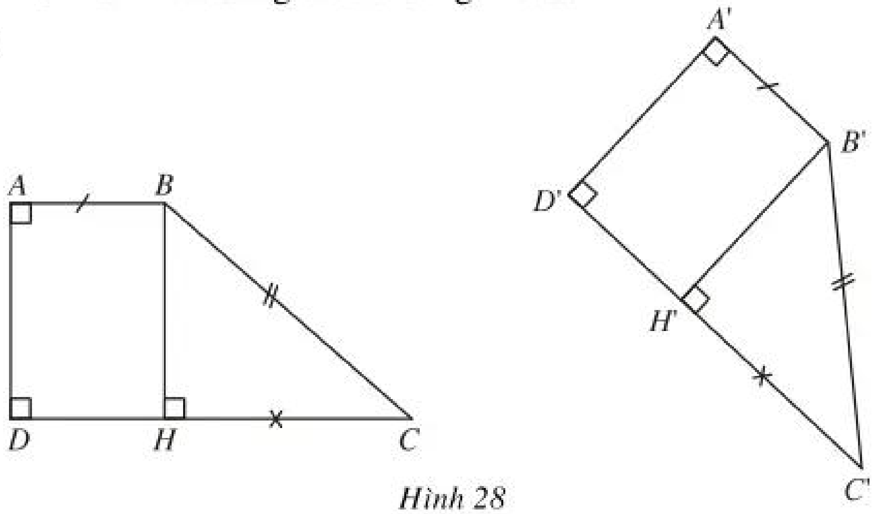
b) (h.27)



Hình 27

Vì góc $\widehat{A}$ và $\widehat{A'}$ là góc tù nên các góc $\widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{B'}, \widehat{C'}$ đều là góc nhọn. Suy ra H ở giữa B và C, H' ở giữa B' và C'. Vì hai tam giác vuông ABH và $A'B'H'$ bằng nhau nên có phép dời hình F biến A, B, H lần lượt thành A', B', H'. Dễ thấy rằng khi đó F biến C thành C'. Vậy F biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ nên hai tam giác đó bằng nhau.

48. (h.28)



Hình 28

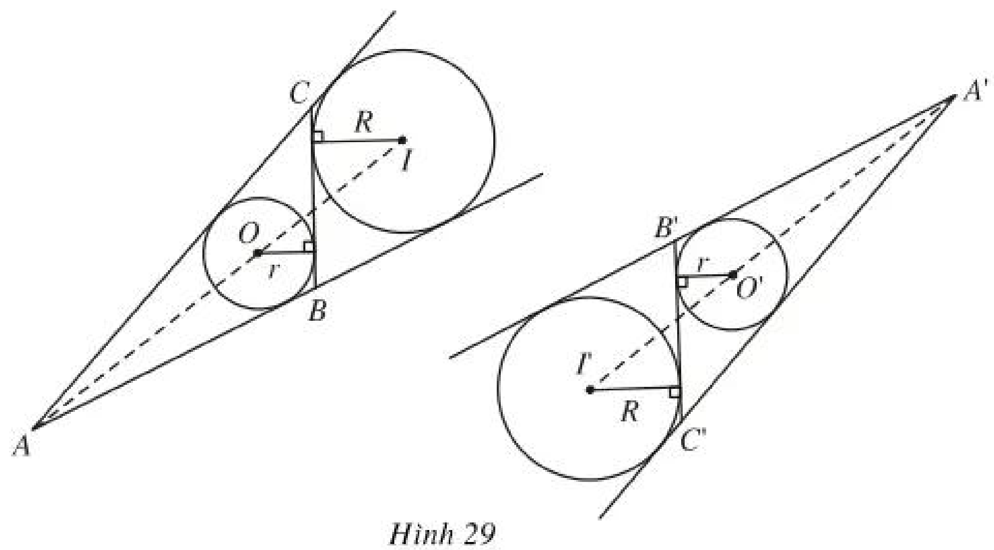
Nếu $AB = CD$ thì kết quả là hiển nhiên.

Giả sử $AB < CD$. Kẻ $BH \perp CD$, $B'H' \perp C'D'$.

Ta có $CH = CD - AB = C'D' - A'B' = C'H'$.

Từ đó, suy ra hai tam giác vuông BHC và $B'H'C'$ bằng nhau. Gọi F là phép dời hình biến tam giác BHC thành tam giác $B'H'C'$, thì dễ thấy rằng F biến A thành A' và biến D thành D'. Do đó F biến hình thang $ABCD$ thành hình thang $A'B'C'D'$. Vậy hai hình thang đó bằng nhau.

49. (h.29)



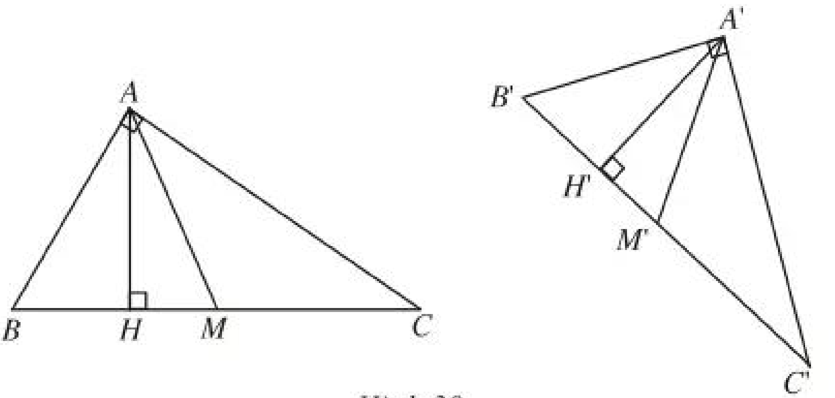
Hình 29

Giả sử tam giác ABC có đường tròn nội tiếp $(O\ ;\ r)$, đường tròn bàng tiếp góc A là $(I\ ;\ R)$; tam giác $A'B'C'$ có đường tròn nội tiếp $(O'\ ;\ r)$, đường tròn bàng tiếp góc A' là $(I'\ ;\ R)$; đồng thời $OI = O'I'$.

Vì $OI = O'I'$ nên có phép dời hình F biến O thành O' và I thành I', khi đó F biến $(O\ ;\ r)$ thành $(O'\ ;\ r)$ và biến $(I\ ;\ R)$ thành $(I'\ ;\ R)$. Mặt khác F biến cặp tiếp tuyến chung ngoài AB và AC của hai đường tròn (O) và (I) thành cặp tiếp tuyến chung ngoài $A'B'$ và $A'C'$ (hoặc thành $A'C'$ và $A'B'$), còn tiếp tuyến chung BC phải biến thành tiếp tuyến chung $B'C'$.

Suy ra F biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ hoặc thành tam giác $A'C'B'$, tức là hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.

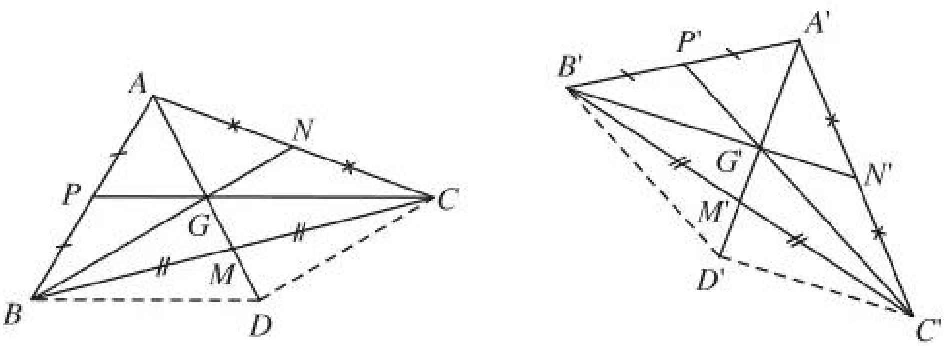
50. (h.30)



Hình 30

Cho hai tam giác ABC, $A'B'C'$ vuông tại các đỉnh A, A'. Có $BC = B'C'$ và hai đường cao AH, $A'H'$ bằng nhau. Gọi AM, $A'M'$ là các đường trung tuyến thì $AM = A'M'$ và do đó hai tam giác vuông AHM và $A'H'M'$ bằng nhau. Gọi F là phép dời hình biến tam giác AHM thành tam giác $A'H'M'$ thì dễ thấy rằng F biến đoạn thẳng BC thành đoạn thẳng $B'C'$ (hoặc thành đoạn thẳng $C'B'$). Vậy hai tam giác đã cho bằng nhau.

51. (h.31)



Hình 31

Giả sử tam giác ABC có ba trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G ; tam giác $A'B'C'$ có ba trung tuyến $A'M'$, $B'N'$, $C'P'$ cắt nhau tại G' và $AM = A'M'$, $BN = B'N'$, $CP = C'P'$.

Ta lấy điểm D và D' sao cho $BGCD$ và $B'G'C'D'$ là những hình bình hành. Dễ thấy rằng hai tam giác GCD và $G'C'D'$ bằng nhau. Bởi vậy, có một phép dời hình F biến G, C, D lần lượt thành các điểm G', C', D'. Rõ ràng khi đó F biến A thành A', B thành B' nên hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.

52. *Hướng dẫn*. Hãy chứng minh rằng bán kính các đường tròn tâm A và tâm A' bằng nhau, bán kính các đường tròn tâm B và tâm B' bằng nhau, bán kính các đường tròn tâm C và tâm C' bằng nhau. Suy ra phép dời hình F biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ sẽ biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$.