§5. Khoảng cách

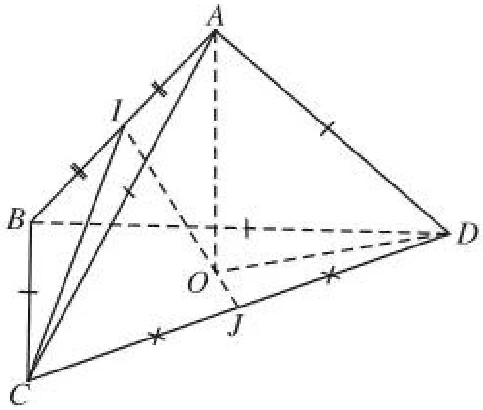
56. (h.191)

a) Học sinh tự chứng minh.

b) Gọi O là điểm cách đều các đỉnh A, B, C, D thì O thuộc đường thẳng IJ. Khi đó $OA = OD$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $IA^2 + IO^2 = OJ^2 + JD^2$, đặt $IO = x$ ta có đẳng thức

$$\frac{a^2}{4} + x^2 = (a - x)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{4}a.$$



Hình 191

Như vậy, khoảng cách từ điểm O đến mỗi đỉnh của tứ diện $ABCD$ bằng

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

57. (h.192)

a) Gọi H là trung điểm của AB thì $NH \parallel SA$.

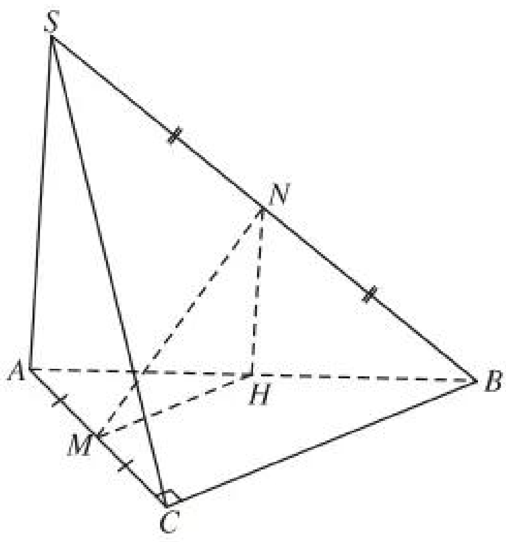
Do $SA \perp (ABC)$ nên $NH \perp (ABC)$, từ đó $\widehat{NHM} = 90^o$. Vậy

$$MN^2 = NH^2 + HM^2$$

$$= \frac{SA^2}{4} + \frac{BC^2}{4} = \frac{1}{4}(h^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + b^2}.$$

b) $h = b$.



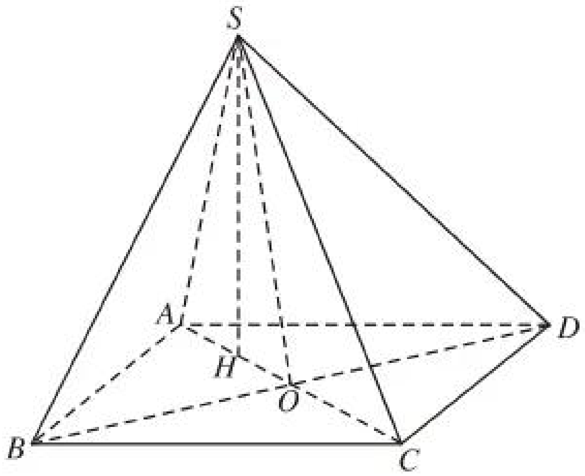
Hình 192

58. (h.193)

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $OA = OC$, $OB = OD$.

Vì $SB = SD = CB = CD$ nên $\Delta BCD = \Delta BSD$, từ đó $SO = OC = OA$.

Vậy SAC là tam giác vuông tại S.



Hình 193

b) $\left.\begin{array}{l} AC \perp BD \\ SO \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$,

từ đó $(SAC) \perp (ABCD)$.

Vậy nếu kẻ đường cao SH của tam giác SAC thì $SH \perp (ABCD)$,

do đó $d(S\,;\,\text{mp}(ABCD)) = SH = \dfrac{SA.SC}{AC} = \dfrac{a.x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

59. (h.194)

a) Ta có $CD \perp (SAD)$ nên $(CDA_1) \perp (SAD)$. Từ đó, khi kẻ đường cao SH của tam giác SA_1D thì

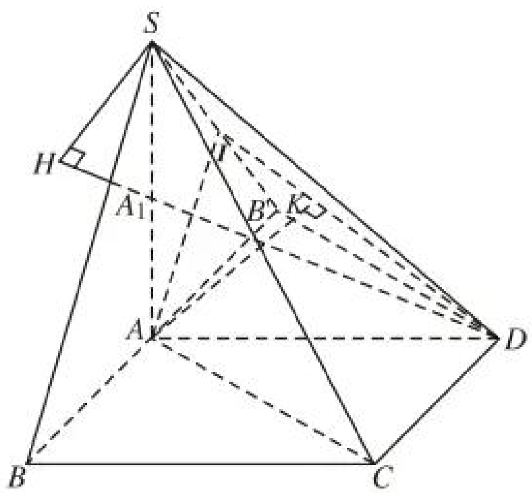
$$SH \perp \text{mp}(CDA_1)$$

và $\quad SH = d(S\,;\,\text{mp}(CDA_1))$.

Ta có

$SH.A_1D = 2S_{SA_1D} = S_{SAD} = \dfrac{a^2}{2}$.

$A_1D = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.



Hình 194

Vậy $SH = \dfrac{a^2}{2} \cdot \dfrac{2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

b) Kẻ qua D đường thẳng song song với AC, cắt đường thẳng AB tại B', khi đó $B'D = a\sqrt{2}$, $AB' = a$, $SB' = a\sqrt{2}$, $SD = a\sqrt{2}$.

Vậy $SB'D$ là tam giác đều. Gọi I là trung điểm của SB' thì

$$DI = \frac{a\sqrt{6}}{2},\ SB' \perp (AID)$$

từ đó $(AID) \perp (SB'D)$.

Vậy khi kẻ đường cao AK của tam giác AID thì AK là khoảng cách từ A đến mp$(SB'D)$. Mặt khác AC // $(SB'D)$ nên AK cũng là khoảng cách giữa AC và SD.

Ta có $AI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $AD = a$.

Vì $AD \perp (SAB)$ nên $AD \perp AI$.

Do đó $$AK = \frac{AI.AD}{DI} = \frac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a}{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}\cdot$$

Vậy khoảng cách giữa AC và SD bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot$

60. (h.195)

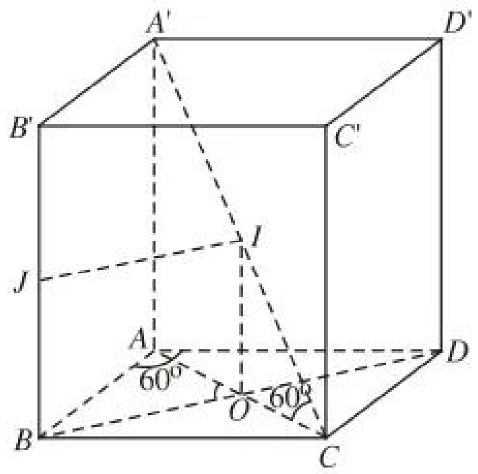
a) Dễ thấy $\widehat{A'CA} = 60^o$.

Do $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{A} = 60^o$ nên $AC = a\sqrt{3}$.

Đường cao của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ chính là $A'A$. Mặt khác

$A'A = AC\tan\widehat{A'CA} = a\sqrt{3}\tan 60^o = 3a$.

b) Ta có BB' // $(A'AC)$ và $BO \perp (A'AC)$ với O là tâm của hình thoi $ABCD$ (giao điểm của hai đường chéo).



Hình 195

Kẻ OI // AA' và kẻ IJ // BO thì dễ dàng chứng minh được IJ là đường vuông góc chung của BB' và $A'C$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'C$ chính là BO. Mặt khác $BO = \dfrac{a}{2}\cdot$

Vậy $d(BB'\,;A'C) = \dfrac{a}{2}\cdot$

Chú ý. Có thể tìm thấy đường vuông góc chung của BB' và $A'C$ là IJ (I, J lần lượt là trung điểm của $A'C$ và BB') bằng cách xét tứ diện $A'B'BC$ có

$$A'B' = BC = a,$$

$$A'B = B'C = \sqrt{a^2 + BB'^2}\,.$$

61. (h.196)

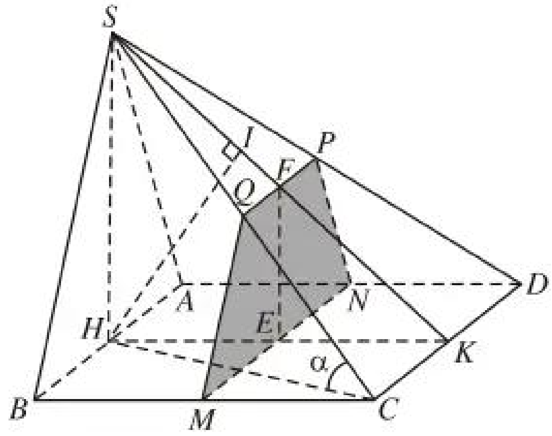
a) Gọi H là trung điểm của AB thì $SH \perp AB$, từ đó $SH \perp (ABCD)$. Vậy khoảng cách từ S đến mp$(ABCD)$ là SH, đó là chiều cao của hình chóp.

Ta có $SH = HC\tan\alpha$,

mặt khác $HC^2 = BH^2 + BC^2 = \dfrac{5a^2}{4}$

hay $\quad HC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}\cdot$

Vậy $\quad SH = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}\tan\alpha.$



Hình 196

b) Gọi K là trung điểm của CD thì $CD \perp (SHK)$, từ đó $(SCD) \perp (SHK)$. Vậy nếu kẻ đường cao HI của tam giác SHK thì HI là khoảng cách từ H đến mp(SCD). Ta có

$$HI = \frac{HS.HK}{SK} = \frac{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\tan\alpha.a}{\sqrt{\dfrac{5a^2}{4}\tan^2\alpha + a^2}} = \frac{a\sqrt{5}\tan\alpha}{\sqrt{5\tan^2\alpha + 4}}\cdot$$

c) Vì SH và CD cùng vuông góc với BC nên SH, CD song song với mặt phẳng trung trực (R) của BC. Khi đó

$(R) \cap (ABCD) = MN$ với $MN \parallel CD$ và M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD.

$(R) \cap (SHK) = EF$, $EF \parallel SH$, E là trung điểm của MN.

$(R) \cap (SCD) = PQ$, PQ đi qua điểm F và $PQ \parallel CD$. Thiết diện $MNPQ$ là hình thang cân.

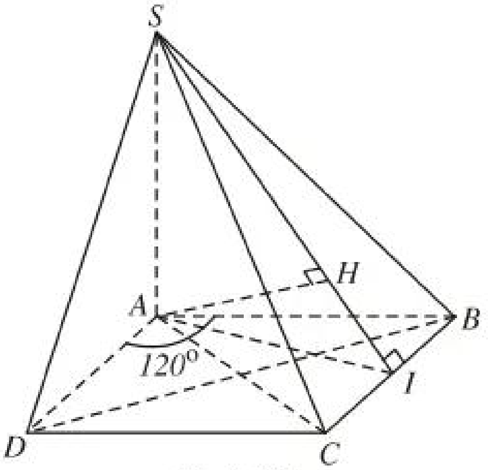
Ta có
$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).EF$$
$$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right).\frac{a\sqrt{5}}{4}\tan\alpha$$
$$= \frac{3a^2\sqrt{5}}{16}\tan\alpha.$$

62. (h.197)

a) Vì $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{BAD} = 120^o$ nên ABC là tam giác đều. Gọi I là trung điểm của BC thì

$$BC \perp (AIS).$$

Mặt khác SAI là tam giác vuông tại A nên $\widehat{SIA}$ là góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Theo giả thiết $\widehat{SIA} = 60^o$.



Hình 197

Ta có $\qquad BD^2 + AC^2 = 4AB^2$

mà $AC = AB$ nên

$$AB = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow AI = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} \cdot$$

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên SA là đường cao của hình chóp $S.ABCD$. Ta có

$$SA = AI.\tan 60^o.$$

Vậy $\qquad SA = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$

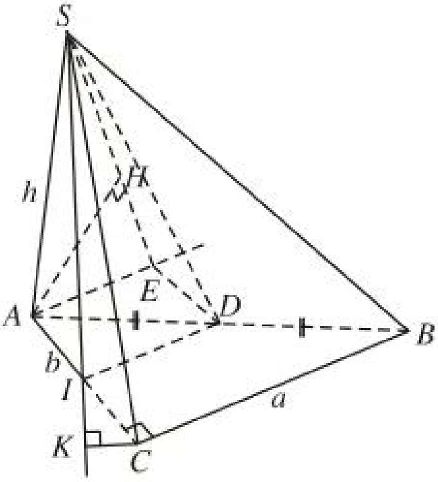
b) Ta có $BC \perp (SAI)$, từ đó $(SAI) \perp (SBC)$. Vậy nếu kẻ đường cao AH của tam giác SAI thì AH là khoảng cách từ A đến mp(SBC). Xét tam giác vuông SAI ta có

$$AH = \frac{SA.AI}{SI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot$$

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot$

63. (h.198)

a) Gọi E là giao điểm của đường thẳng qua D, song song với AC và đường thẳng qua A, song song với BC thì AED và SED là hai tam giác vuông tại E, do đó $\widehat{SDE}$ là góc giữa SD và AC.



Hình 198

Đặt $\widehat{SDE} = \alpha$ thì

$$\tan\alpha = \frac{SE}{ED} = \frac{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}}{\frac{b}{2}}$$

hay $$\tan\alpha = \frac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{b}.$$

b) Vì AC // (SDE) nên $d(AC\ ;\ SD) = d(A\ ;\ (SDE))$.

Do $DE \perp (SAE)$ nên $(SDE) \perp (SAE)$.

Vậy nếu kẻ đường cao AH của tam giác vuông SAE thì AH là khoảng cách giữa AC và SD.

Ta có $$AH = \frac{AS.AE}{SE} = \frac{h.\frac{a}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}} = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}.$$

Vậy khoảng cách giữa AC và SD là $AH = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}$.

c) Gọi I là trung điểm của AC thì BC // (SDI).

Do đó $d(BC\ ;\ SD) = d(C\ ;\ (SDI))$.

Ta có $DI \perp (SAC)$ nên $(SDI) \perp (SAC)$.

Vậy khi kẻ đường cao CK của tam giác SIC thì CK là khoảng cách phải tìm.

Ta có $$S_{SIC} = \frac{bh}{4},\ SI = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + b^2}$$

nên $$CK = \frac{\frac{bh}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + b^2}}$$

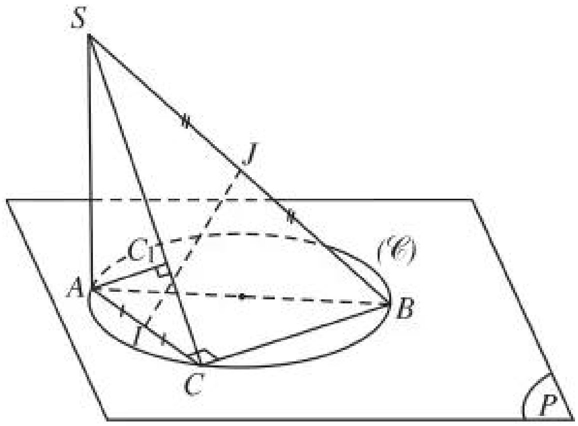
hay $$CK = \frac{bh}{\sqrt{4h^2 + b^2}}.$$

Vậy khoảng cách giữa BC và SD bằng $\dfrac{bh}{\sqrt{4h^2 + b^2}}$.

64. (h.199)

Cách 1.

Dễ thấy ACB là tam giác vuông tại C mà $SA \perp (ABC)$ nên $\widehat{SCB} = 90^o$. Tam giác SAB vuông tại A, tam giác SCB vuông tại C mà J là trung điểm của SB, từ đó $AJ = CJ$. Mặt khác $IA = IC$. Vậy $IJ \perp AC$. Từ đó, IJ là đường vuông góc chung của AC và SB khi và chỉ khi $IS = IB$. Xét các tam giác vuông SAI và BCI ta thấy $IS = IB$ khi và chỉ khi $SA = BC$.



Hình 199

Vậy điểm C thuộc đường tròn đã cho sao cho $BC = h$ thì IJ là đường vuông góc chung của AC và SB. Chú ý rằng có hai điểm C như vậy.

Cách 2.

Xét tứ diện $SABC$ với I, J là trung điểm của AC, SB, ta có IJ là đường vuông góc chung của AC và SB khi và chỉ khi SA bằng CB và SC bằng AB. Xét các tam giác vuông SAC và ACB ta có các đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi SA bằng BC.

Dễ thấy $d(A\ ;\ mp(SCB)) = AC_1$, trong đó AC_1 là đường cao của tam giác vuông SAC.

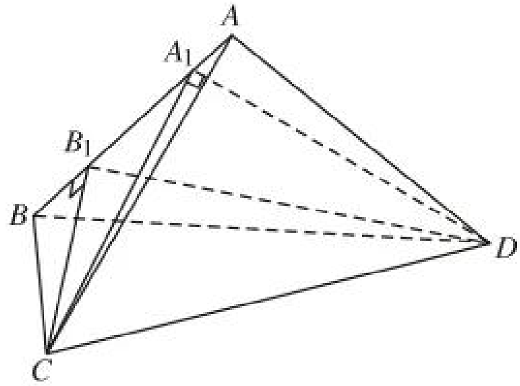
Ta có $$AC_1 = \frac{SA.AC}{SC},$$

mà $$AC = \sqrt{4R^2 - h^2}\ , SC = 2R.$$

Từ đó, ta có $AC_1 = \dfrac{h.\sqrt{4R^2 - h^2}}{2R}$.

65. a) *Cách 1.* (h.200)

Vì $S_{CAB} = S_{DAB}$ nên $CB_1 = DA_1$ (CB_1, DA_1 tương ứng là đường cao của các tam giác CAB và DAB). Từ đó1 $CA_1 = DB_1$.



Hình 200

Nếu $A_1 \not\equiv B_1$.

Xét tứ diện A_1B_1CD có $A_1C = B_1D$, $CB_1 = DA_1$ nên đường vuông góc chung của A_1B_1, CD là đường thẳng nối trung điểm của A_1B_1 và CD, hay đường vuông góc chung của AB và CD đi qua trung điểm của CD.

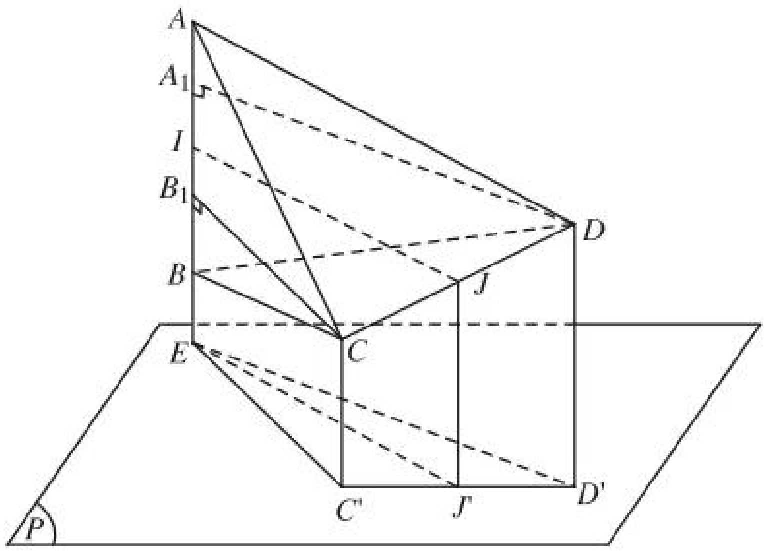
Nếu $A_1 \equiv B_1$ thì kết quả là hiển nhiên.

Cách 2. (h.201)

Kẻ các đường cao CB_1, DA_1 tương ứng của các tam giác CAB và DAB. Xét mp(P) vuông góc với AB. Gọi IJ là đường vuông góc chung của AB và CD thì IJ // (P), CB_1 // (P) và DA_1 // (P).

Chiếu tứ diện đã cho lên (P) thì các điểm A, B, A_1, B_1, I cùng có hình chiếu là E. Các điểm C, J, D lần lượt có hình chiếu là C', J', D'. Dễ thấy J' thuộc $C'D'$, $EC' = CB_1$, $ED' = A_1D$, từ đó $EC' = ED'$.

Mặt khác do $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$ nên suy ra $EJ' \perp C'D'$.



Hình 201

Như vậy $C'ED'$ là tam giác cân tại E và nhận EJ' là đường cao, từ đó $J'C' = J'D'$.

Do vậy $JC = JD$, tức là đường vuông góc chung của AB, CD đi qua trung điểm của CD.

b) Vì bốn mặt của tứ diện $ABCD$ có diện tích bằng nhau nên $S_{CAB} = S_{DAB}$ và $S_{BCD} = S_{ACD}$. Do đó theo câu a) thì đường vuông góc chung của AB và CD là đường thẳng IJ, trong đó I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó $AC = BD$, $BC = AD$.

Tương tự như trên ta có $AC = BD$ và $AB = CD$. Vậy $ABCD$ là tứ diện có các cặp cạnh đối diện bằng nhau, tức là $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$.

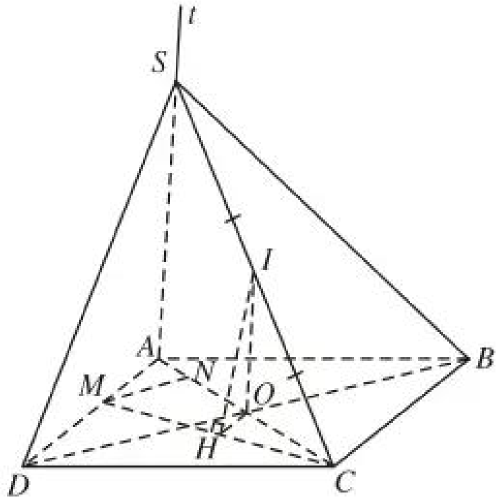
66. (h.202)

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $DB \perp (SAC)$. Kẻ MN song song với DB ($N \in AC$) thì $MN \perp (SAC)$, do đó khoảng cách từ M đến mp(SAC) bằng MN. Dễ thấy

$$MN = \frac{AM}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

b) Ta có $IO \parallel SA$,

do $SA \perp (ABCD)$ nên $IO \perp (ABCD)$. Do $IH \perp MC$ nên $HO \perp HC$ (định lí ba đường vuông góc). Vậy $\widehat{OHC} = 90^{\circ}$, tức là H thuộc đường tròn đường kính OC nằm trong mặt phẳng chứa hình vuông $ABCD$.



Hình 202

67. (h.203)

a) Gọi A_1 là trung điểm của BC thì

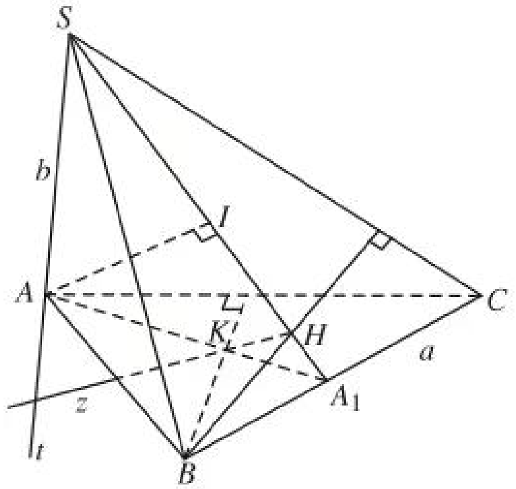
$$BC \perp \text{mp}(SAA_1),$$

từ đó $\quad (SAA_1) \perp (SBC)$.

Kẻ đường cao AI của tam giác SAA_1 thì $AI \perp (SBC)$. Từ đó, khoảng cách từ A đến mp(SBC) bằng AI.

Ta có $$AI = \frac{AS.AA_1}{SA_1} = \frac{b.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{b^2 + \frac{3a^2}{4}}}.$$

Vậy $$AI = \frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4b^2}}.$$



Hình 203

b) Vì H là trực tâm tam giác SBC nên H thuộc SA_1. Do $(SAA_1) \perp (SBC)$ và $Hz \perp (SBC)$ nên Hz nằm trong mp(SAA_1). Gọi K là giao điểm của Hz và AA_1, ta có $KH \perp (SBC)$, $BH \perp SC$ nên $KB \perp SC$ (định lí ba đường vuông góc).

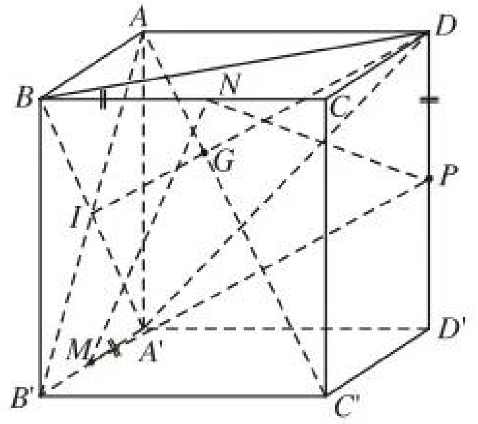
Mặt khác $SA \perp (ABC)$, $BK \perp SC$ nên $BK \perp AC$ (định lí ba đường vuông góc). Như vậy K là trực tâm của tam giác ABC.

Vậy khi S di động trên đường thẳng At vuông góc với mp(ABC) thì đường thẳng Hz đi qua điểm cố định là trực tâm K của tam giác ABC.

68. (h.204)

a) Góc giữa AC' và $A'B$ bằng 90°. Vì AC' vuông góc với $(A'BD)$ tại trọng tâm G của tam giác $A'BD$ và $A'BD$ là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên

$$d(AC' ; A'B) = GI = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



Hình 204

b) Đặt $A'M = BN = DP = x$ thì

$$AN^2 = a^2 + x^2$$
$$AP^2 = a^2 + x^2$$
$$AM^2 = a^2 + x^2.$$

Suy ra $\quad AM = AN = AP.$

Mặt khác

$$NP^2 = NC^2 + CD^2 + DP^2 = (a-x)^2 + a^2 + x^2 ;$$
$$NM^2 = NB^2 + BB'^2 + B'M^2 = x^2 + a^2 + (a-x)^2.$$

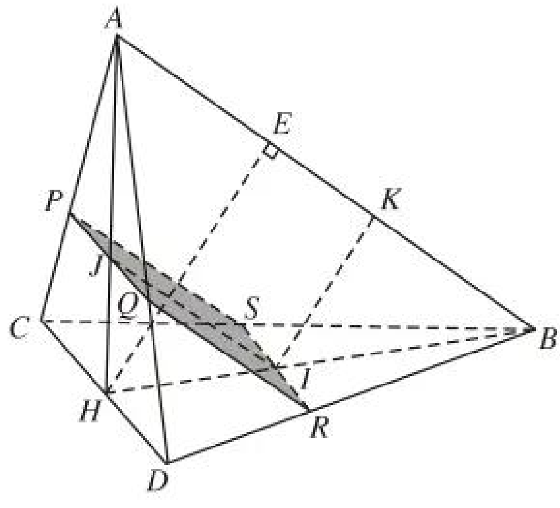
Tương tự, ta có $MN = NP = PM$.

Do đó $A.MNP$ là hình chóp đều. Khi ấy đường thẳng nối A với trọng tâm tam giác MNP sẽ vuông góc với mp(MNP). Tương tự như trên ta cũng có đường thẳng nối C' với trọng tâm của tam giác MNP sẽ vuông góc với mp(MNP). Vậy trọng tâm tam giác MNP luôn thuộc đường thẳng cố định là AC'.

69. (h.205)

Dễ thấy thiết diện là hình bình hành $PQRS$. Mặt khác theo giả thiết $CD \perp (AHB)$ nên $CD \perp AB$. Vậy $PQRS$ là hình chữ nhật.

Kẻ $HE \perp AB$ thì $HE \perp (PQRS)$. Kẻ $IK \,//\, HE$ thì $IK \perp (PQRS)$. Do $AB \,//\, (PQRS)$ và $d(B ; (PQRS)) = d$ nên $IK = d$.



Hình 205

Ta có $\quad HE = \dfrac{AH.HB}{AB} = \dfrac{\sqrt{AB^2 - BH^2}.HB}{AB}$

$$= \frac{a\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}.$$

Ta có $\quad \dfrac{IK}{HE} = \dfrac{BI}{BH} = \dfrac{RS}{CD}$

suy ra $\quad RS = \dfrac{da}{a\sqrt{15}}.4\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}d}{\sqrt{15}}$;

$$BI = \frac{IK.BH}{HE} = \frac{d.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}d}{\sqrt{5}}.$$

Mặt khác $\quad \dfrac{IJ}{AB} = \dfrac{HI}{HB} = \dfrac{(HB - IB)}{HB}$;

từ đó $\quad IJ = \dfrac{AB(HB - IB)}{HB} = \dfrac{\sqrt{2}(a\sqrt{15} - 4\sqrt{2}d)}{\sqrt{15}}.$

Vậy $\quad S_{PQRS} = RS.IJ = \dfrac{8}{15}d(a\sqrt{15} - 4\sqrt{2}d).$

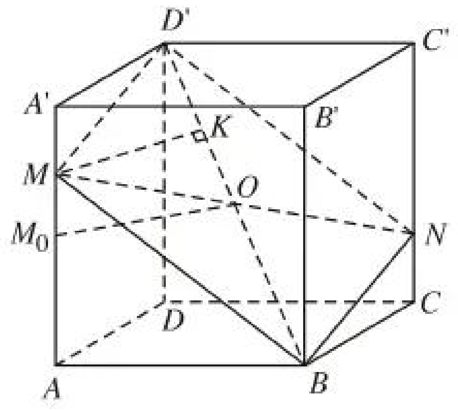
70. (h.206)

Xét (P) là mặt phẳng chứa một đường chéo, chẳng hạn đường chéo BD' của hình lập phương.

Nếu (P) chứa $D'A'$ thì thiết diện có diện tích là $a^2\sqrt{2}$.

Tương tự, nếu (P) chứa $D'C'$ hoặc $D'D$ thì thiết diện cũng có diện tích là $a^2\sqrt{2}$.

Ta xét (P) cắt AA' tại điểm M. Gọi O là tâm hình lập phương thì MO cắt CC' tại N. Do đó thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi (P) là $BMD'N$, đó là hình bình hành.



Hình 206

Ta có

$$S_{BMD'N} = BD'.MK = d.MK$$

(d là độ dài đường chéo của hình lập phương).

Vậy $S_{BMD'N}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MK nhỏ nhất, tức MK là đường vuông góc chung của BD' và AA'. Dễ thấy OM_0 là đường vuông góc chung của BD' và AA', trong đó M_0 là trung điểm của AA', OM_0 bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy lúc đó

$$S_{BMD'N} = a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

Chú ý. Khi (P) cắt $A'B'$ hoặc $B'C'$ thì cách giải quyết bài toán cũng như trên và ta có diện tích thiết diện nhỏ nhất trong trường hợp đó cũng là $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Dễ thấy $$\frac{a^2\sqrt{6}}{2} < a^2\sqrt{2}.$$

Vậy nếu (P) qua đường chéo BD' và qua trung điểm một cạnh của hình lập phương không đi qua B và D', thì diện tích thiết diện nhỏ nhất và có giá trị bằng $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.