§5. Khoảng cách

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng (hoặc một đường thẳng) là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó trên mặt phẳng (hoặc trên đường thẳng).*

2. *Khoảng cách từ đường thẳng a đến mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mặt phẳng (P).*

3. *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*

4. + *Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đường thẳng cắt cả hai đường thẳng và vuông góc với hai đường thẳng đó.*

Khi hai đường thẳng vuông góc với nhau và chéo nhau thì ta thường tìm đường vuông góc chung của chúng như sau :

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng thứ nhất và vuông góc với đường thẳng thứ hai tại điểm I. Đường vuông góc chung của chúng là đường thẳng đi qua I nằm trong (P) và vuông góc với đường thẳng thứ nhất.

+ *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng :*

• *Độ dài của đoạn vuông góc chung IJ của a và b, trong đó I và J lần lượt là các giao điểm của đường vuông góc chung đó với a và b.*

• *Khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.*

• *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.*

II - ĐỀ BÀI

56. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = BD = AC = AD$; $AB = a$, $CD = a\sqrt{3}$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD, $IJ = a$.

a) Chứng minh rằng IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.

b) Tính khoảng cách từ điểm cách đều bốn đỉnh A, B, C, D đến mỗi đỉnh đó.

57. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông ở C, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AC = a$, $BC = b$, $SA = h$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và SB.

a) Tính độ dài MN.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, h để MN là đường vuông góc chung của AC và SB.

58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng a.

a) Chứng minh rằng SAC là tam giác vuông.

b) Tính đường cao SH của hình chóp đã cho.

59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Tính :

a) Khoảng cách từ điểm S đến mp(A_1CD) trong đó A_1 là trung điểm của SA ;

b) Khoảng cách giữa AC và SD.

60. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{A} = 60^o$, góc của đường chéo $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng 60^o.

a) Tính đường cao của hình hộp đó.

b) Tìm đường vuông góc chung của $A'C$ và BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác cân tại S và mp(SAB) vuông góc với mp$(ABCD)$, cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy góc α. Tính :

a) Chiều cao của hình chóp $S.ABCD$;

b) Khoảng cách từ chân đường cao hình chóp đến mặt phẳng (SCD) ;

c) Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng trung trực của cạnh BC.

62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $\widehat{A} = 120^o$, $BD = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là 60^o. Tính :

a) Đường cao của hình chóp.

b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCB).

63. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, $CA = b$, $CB = a$, cạnh $SA = h$ vuông góc với đáy. Gọi D là trung điểm của cạnh AB. Tính :

a) Góc giữa hai đường thẳng AC và SD ;

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD ;

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SD.

64. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn $(\mathscr{C})$ đường kính $AB = 2R$; C là điểm bất kì thuộc đường tròn (C không trùng với A và B). S là điểm trong không gian sao cho SA vuông góc với (P) và $SA = h$ (h cho trước và $h < 2R$). Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và SB. Hãy xác định vị trí điểm C trên đường tròn để IJ là đường vuông góc chung của AC và SB. Khi đó, tính khoảng cách từ điểm A đến mp(SBC).

65. a) Hai mặt ABC và ABD của hình tứ diện $ABCD$ là những tam giác có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng đường vuông góc chung của AB và CD đi qua trung điểm của CD.

b) Bốn mặt của hình tứ diện $ABCD$ có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng các cặp cạnh đối diện của tứ diện bằng nhau, nghĩa là $BC = AD$, $AC = BD$, $AB = CD$.

66. Trên cạnh AD của hình vuông $ABCD$ cạnh a, ta lấy điểm M với $AM = x$ $(0 < x < AD)$ và trên nửa đường thẳng At vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lấy điểm S sao cho $AS = y$.

a) Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAC).

b) Gọi I là trung điểm của SC và H là hình chiếu của I trên CM. Chứng minh rằng điểm H thuộc đường tròn cố định khi M chạy trên AD và S chạy trên At.

67. Cho ABC là tam giác đều cạnh a. Trên đường thẳng At vuông góc với mp(ABC) lấy điểm S với $AS = b$.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a, b.

b) Hz là đường thẳng đi qua trực tâm H của tam giác SBC và vuông góc với mp(SBC). Chứng minh rằng khi S di động trên At thì đường thẳng Hz luôn đi qua một điểm cố định.

68. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $A'B$.

b) Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh $A'B'$, BC, DD' sao cho $A'M = BN = DP$. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác MNP luôn thuộc đường thẳng cố định khi M, N, P thay đổi.

69. Đáy của hình chóp $A.BCD$ là tam giác đều. Đường cao của hình chóp kẻ từ đỉnh A đi qua trung điểm H của cạnh CD. Cắt hình chóp đó bởi mặt phẳng song song với AB và CD và cách đỉnh B một khoảng bằng d. Tính diện tích thiết diện thu được, biết cạnh của tam giác đều BCD là a và $AB = a\sqrt{2}$.

70. Cắt hình lập phương bằng một mặt phẳng (P) đi qua một đường chéo của hình lập phương. Phải chọn (P) như thế nào để thiết diện thu được có diện tích nhỏ nhất ?