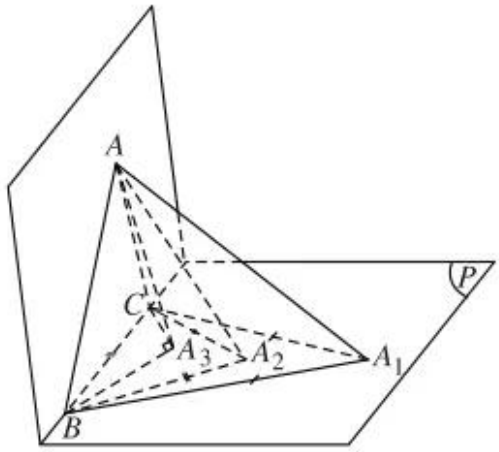
§5. Phép chiếu song song

58. (h.111)

a) Qua BC ta dựng một mặt phẳng (P) không đi qua A. Trong mặt phẳng (P) ta dựng tam giác cân BCA_1 ($BA_1 = CA_1$). Khi đó, phép chiếu song song lên mp(P) theo phương chiếu $l = AA_1$ biến tam giác ABC thành tam giác cân A_1BC.

b) Trong (P) ở câu a), ta dựng tam giác đều BCA_2 và chọn phương chiếu $l = AA_2$.

c) Trong (P) ở câu a), ta dựng tam giác vuông BCA_3 ($\widehat{BA_3C} = 90^o$) và chọn phương chiếu $l = AA_3$.



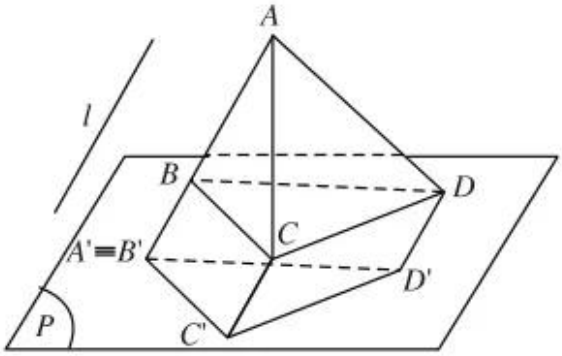
Hình 111

59. (h.112)

Vì phương chiếu l là đường thẳng AB nên hình chiếu của đoạn thẳng AB là giao điểm của AB và (P).

Do đó $AB \cap (P) = A' \equiv B'$.

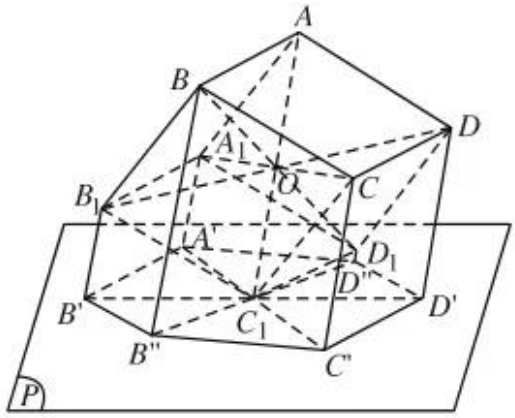
C và D có hình chiếu là C' và D'. Vậy hình chiếu của tứ diện $ABCD$ lên mp(P) theo phương chiếu AB là tam giác $A'C'D'$.



Hình 112

60. (h.113)

Chọn mặt phẳng chiếu (P) qua C_1 và không chứa A. Gọi O là tâm của hình hộp. Khi đó hình chiếu của các điểm A, O, C_1 là điểm C_1.



Hình 113

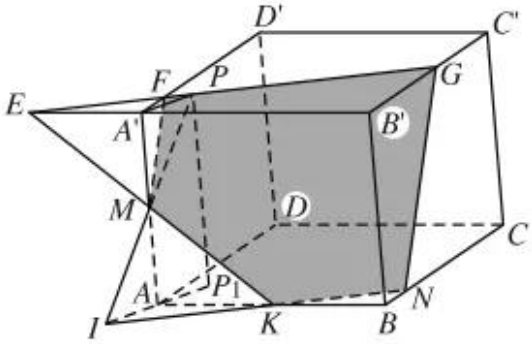
Hình chiếu của đoạn thẳng B_1D là đoạn thẳng $B'D'$ nhận C_1 làm trung điểm.
Hình chiếu của đoạn thẳng CA_1 là đoạn thẳng $C'A'$ nhận C_1 làm trung điểm.
Hình chiếu của đoạn thẳng BD_1 là đoạn thẳng $B''D''$ nhận C_1 làm trung điểm.

Vậy hình chiếu của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ lên mp(P) theo phương chiếu AC_1 là lục giác $A'B'B''C'D'D''$ có các cạnh đối song song và bằng nhau.

61. Thông thường là một hình tứ giác $ABCD$ và hai đường chéo AC, BD có các nét khuất, nét liền.

62. (h.114)

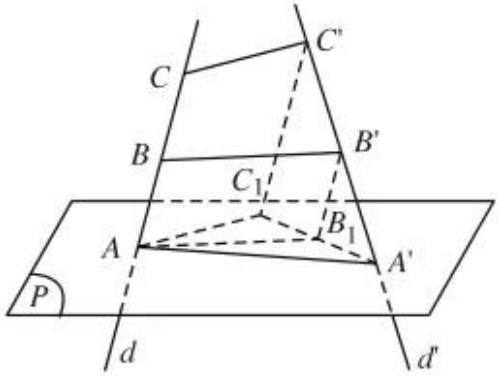
Trước hết, ta tìm giao điểm của đường thẳng PM với mặt phẳng ($ABCD$). Gọi P_1 là hình chiếu song song của P trên mp($ABCD$) theo phương chiếu AA'. Khi đó PM cắt P_1A tại I. Vì I thuộc mp($ABCD$) nên IN cắt AB tại K. Gọi E là giao điểm của KM với $A'B'$. Nối E với P cắt $A'D'$ và $B'C'$ lần lượt tại F và G. Vậy thiết diện là ngũ giác $MKNGF$.



Hình 114

63. (h.115)

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua AA' và song song với BB'. Theo định lí Ta-lét, ta cũng có CC' // mp(P). Xét phép chiếu song song lên mp(P) theo phương chiếu d, ta được hình chiếu của A', B', C' tương ứng là A', B_1, C_1. Khi đó ba điểm A', B_1, C_1 thẳng hàng. Ta có $C'C_1$ // CA và vì CC' // mp(P) nên giao tuyến AC_1 của mp($CC'C_1A$) với mp(P) song song với CC'. Do đó tứ giác $CC'C_1A$ là hình bình hành, nên $AC_1 = CC'$. Tương tự như vậy, ta cũng chứng minh được $AB_1 = BB'$. Ta phải chứng minh $AA' + AC_1 > 2AB_1$.

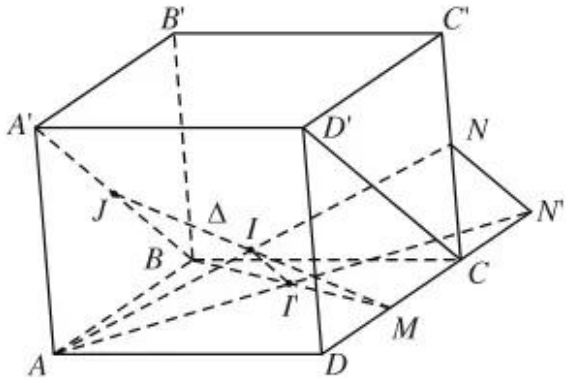


Hình 115

Thật vậy, vì B' là trung điểm của $A'C'$ nên B_1 là trung điểm của cạnh $A'C_1$ của tam giác $AA'C_1$. Từ đó dễ thấy tổng hai cạnh AA' và AC_1 trong tam giác $AA'C_1$ lớn hơn hai lần trung tuyến ứng với cạnh thứ ba.

64. (h.116)

a) Giả sử đã dựng được đường thẳng Δ cần tìm cắt cả AN và BA'. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và BA'.



Hình 116

Xét phép chiếu song song lên mp($ABCD$) theo phương chiếu $A'B$. Khi đó ba điểm J, I, M lần lượt có hình chiếu là B, I' và M. Do đó ba điểm B, I', M thẳng hàng. Gọi N' là hình chiếu của N thì AN' là hình chiếu của AN. Vì I thuộc AN nên I' thuộc AN'. Vậy I' là giao điểm của BM và AN'.

Từ phân tích ở trên ta có thể dựng đường thẳng Δ theo các bước sau đây :

– Lấy giao điểm I' của AN' và BM.

– Trong mp(ANN') dựng $II' \parallel NN'$ (đã có $NN' \parallel CD'$) cắt AN tại I.

– Vẽ đường thẳng MI, đó là đường thẳng Δ cần tìm.

Dễ chứng minh được, đường thẳng Δ nói trên cắt BA'.

b) Dễ thấy $\quad MC = CN'$

suy ra $\quad MN' = CD = AB$.

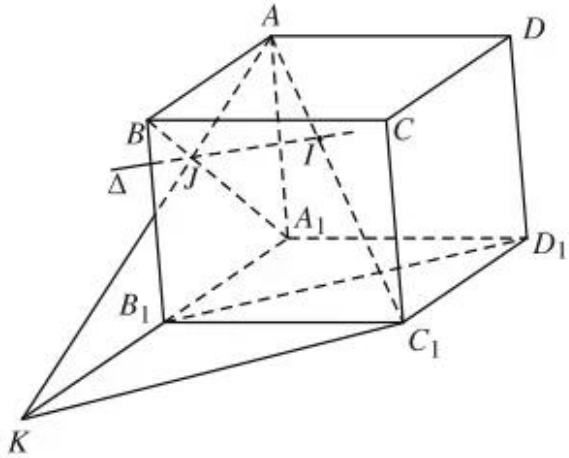
Do đó I' là trung điểm của BM.

Mặt khác $II' \parallel JB$, nên II' là đường trung bình của tam giác MBJ, suy ra

$$IM = IJ \Rightarrow \frac{IM}{IJ} = 1.$$

65. (h.117)

a) Giả sử đã xác định được đường thẳng Δ cắt AC_1 và BA_1 lần lượt tại I và J.



Hình 117

Xét phép chiếu song song lên mp(ABB_1A_1) theo phương chiếu D_1B_1. Khi đó, hình chiếu của ba điểm thẳng hàng A, I, C_1 lần lượt là ba điểm thẳng hàng A, J, K. Mặt khác J thuộc BA_1, nên J chính là giao điểm của AK và BA_1.

Từ đó, ta có cách dựng đường thẳng Δ theo các bước sau đây :

– Dựng điểm K là hình chiếu của C_1 (theo phương chiếu D_1B_1).

– Lấy giao điểm J của AK và BA_1.

– Qua J dựng đường thẳng $\Delta \parallel C_1K$ (đã có $C_1K \parallel B_1D_1$) ta được đường thẳng Δ cần tìm.

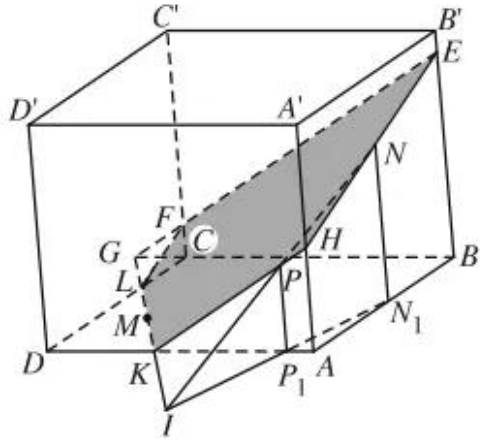
b) Dễ thấy $A_1B_1 = B_1K \Rightarrow A_1K = 2AB$ (do $A_1B_1 = AB$).

Vì $AB \parallel A_1K \Rightarrow \dfrac{AJ}{JK} = \dfrac{AB}{A_1K} = \dfrac{1}{2}$.

Mặt khác $IJ \parallel C_1K \Rightarrow \dfrac{AI}{IC_1} = \dfrac{AJ}{JK} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{AI}{AC_1} = \dfrac{1}{3}$.

66. (h.118)

a) Giả sử M, N, P lần lượt là các điểm trong của các mặt phẳng $(ABCD)$, $(ABB'A')$, $(ADD'A')$ xác định như hình vẽ. Trước hết ta tìm giao điểm I của PN với mp$(ABCD)$. Ta xét phép chiếu song song lên mp$(ABCD)$ theo phương chiếu AA'. Các điểm N, P có hình chiếu lần lượt là N_1, P_1 ($N_1 \in AB$, $P_1 \in AD$). Khi đó I là giao điểm của PN với P_1N_1.



Hình 118

Trong mp$(ABCD)$ nối I và M lần lượt cắt DA, DC và CB tại K, L, G.

Trong mặt phẳng $(AA'D'D)$ nối K và P cắt AA' tại H.

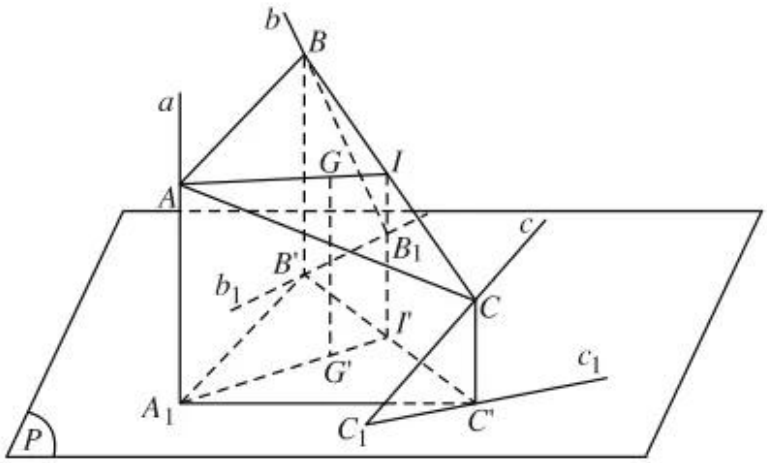
Trong mặt phẳng $(AA'B'B)$ nối H và N cắt BB' tại E.

Trong mặt phẳng $(BCC'B')$ nối E và G cắt CC' tại F.

Vậy thiết diện là ngũ giác $EFLKH$.

b) Làm tương tự như câu a).

67. (h.119)



Hình 119

a) *Phân tích*

Giả sử đã dựng được tam giác ABC có ba đỉnh A, B, C lần lượt nằm trên ba đường thẳng a, b, c đôi một chéo nhau cho trước và nhận điểm G làm trọng tâm.

Lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên a, b, c và gọi (P) là mp$(A_1B_1C_1)$. Xét phép chiếu song song lên mp(P) theo phương chiếu là đường thẳng a. Gọi tam giác $A_1B'C'$ là hình chiếu của tam giác ABC. Khi đó trọng tâm G' của tam giác $A_1B'C'$ là hình chiếu của trọng tâm G của tam giác ABC, trung điểm I' của $B'C'$ là hình chiếu của trung điểm I của BC.

Vậy khi đã chọn (P) thì các điểm A_1, G' dựng được và do đó I' cũng dựng được. Ta chỉ cần dựng hai điểm B' và C' sao cho tam giác $A_1B'C'$ nhận G' làm trọng tâm với $B' \in b_1$, $C' \in c_1$ (b_1, c_1 lần lượt là hình chiếu của b và c).

b) *Cách dựng*

Lấy ba điểm A_1, B_1, C_1 tuỳ ý sao cho $A_1 \in a$, $B_1 \in b$, $C_1 \in c$.

Xác định mặt phẳng (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A_1, B_1, C_1.

Dựng các hình chiếu b_1, c_1 của b và c trên (P) theo phương chiếu a và dựng hình chiếu G' của điểm G.

Trong mp(P), dựng điểm I' sao cho $\overrightarrow{A_1I'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A_1G'}$.

Trong mp(P), dựng điểm $B' \in b_1$, $C' \in c_1$ sao cho I' là trung điểm của $B'C'$.

Dựng điểm $B \in b$, $C \in c$ sao cho $BB' \parallel CC' \parallel a$.

Dựng điểm $I \in BC$ sao cho $II' \parallel a$, hay I là trung điểm của BC.

Trong mp(a, II') dựng đường thẳng IG cắt a tại A.

Dựng tam giác ABC với ba điểm A, B, C vừa dựng được.

c) *Chứng minh*

Vì $$AA_1 \,//\, G'G \,//\, II'$$

nên $$\frac{AI}{AG} = \frac{A_1I'}{A_1G'} = \frac{3}{2}$$

suy ra G là trọng tâm tam giác ABC.

d) *Biện luận*. Bài toán có một nghiệm hình.