§6, §7. Phép vị tự. Phép đồng dạng

53. (h.32)

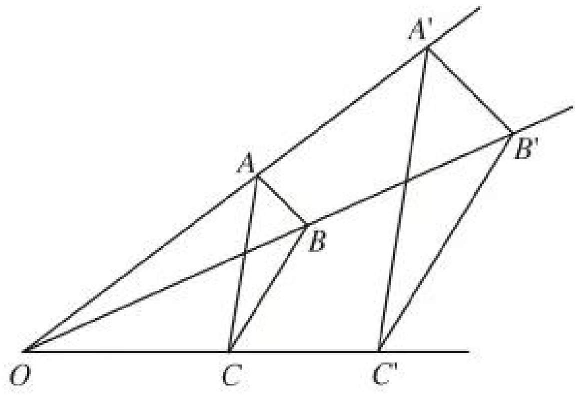
Vì AB và $A'B'$ song song nhưng không bằng nhau nên hai đường thẳng AA' và BB' cắt nhau tại điểm O.

Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số

$$k = \frac{OA'}{OA}$$

thì V biến điểm C thành điểm C_1 sao cho : $A'C_1 \parallel AC$, $B'C_1 \parallel BC$.

Suy ra C_1 trùng với C', tức là V cũng biến C thành C'. Vậy ta có điều phải chứng minh.



Hình 32

54. Lấy một điểm M bất kì, nếu V_1 biến M thành M_1 và V_2 biến M_1 thành M_2 thì $\overrightarrow{O_1M_1} = k_1\overrightarrow{O_1M}$ và $\overrightarrow{O_2M_2} = k_2\overrightarrow{O_2M_1}$.

Khi đó, phép hợp thành F biến M thành M_2. Gọi I là ảnh của O_1 qua phép vị tự V_2, tức là $\overrightarrow{O_2I} = k_2\overrightarrow{O_2O_1}$.

Khi đó $\overrightarrow{IM_2} = k_2\overrightarrow{O_1M_1} = k_1k_2\overrightarrow{O_1M}$.

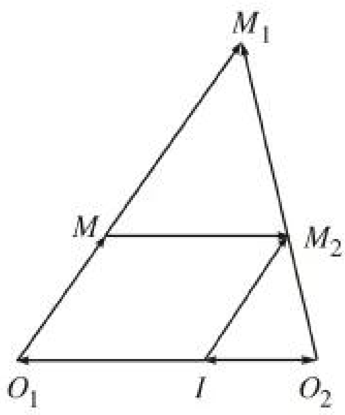
a) (h.33)

Nếu $k_1k_2 = 1$ thì $\overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{O_1M}$ nên

$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{O_1I} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$.

Vậy trong trường hợp này F là phép tịnh tiến theo vectơ

$$\vec{u} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}.$$



Hình 33

b) (h.34)

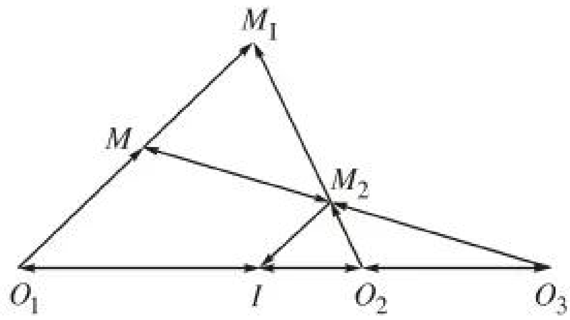
Nếu $k_1k_2 \neq 1$ ta chọn điểm O_3 sao cho

$$\overrightarrow{O_3I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}.$$

Khi đó $\overrightarrow{O_3M_2} = \overrightarrow{O_3I} + \overrightarrow{IM_2}$

$$= k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1} + k_1k_2\overrightarrow{O_1M}$$
$$= k_1k_2\overrightarrow{O_3M}.$$

Vậy F là phép vị tự tâm O_3 tỉ số k_1k_2.



Hình 34

Chú ý rằng tâm O_3 của phép vị tự đó được xác định bởi đẳng thức

$$\overrightarrow{O_3I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}$$

hay $\qquad \overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}.$

Suy ra $\qquad \overrightarrow{O_1O_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1} = (1 - k_1k_2)\overrightarrow{O_1O_3}$

do đó $\qquad \overrightarrow{O_1O_3} = \dfrac{1 - k_2}{1 - k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2}.$

Cũng chú ý rằng tâm của ba phép vị tự V_1, V_2 và F là ba điểm thẳng hàng O_1, O_2 và O_3.

55. Phép vị tự tâm O_3^+ tỉ số $\dfrac{R_2}{R_1}$ biến đường tròn $(I_1 ; R_1)$ thành đường tròn $(I_2 ; R_2)$; phép vị tự tâm O_1^+ tỉ số $\dfrac{R_3}{R_2}$ biến đường tròn $(I_2 ; R_2)$ thành đường tròn $(I_3\ ;\ R_3)$. Theo câu b) bài 54, phép hợp thành của hai phép vị tự đó là phép vị tự, có tỉ số

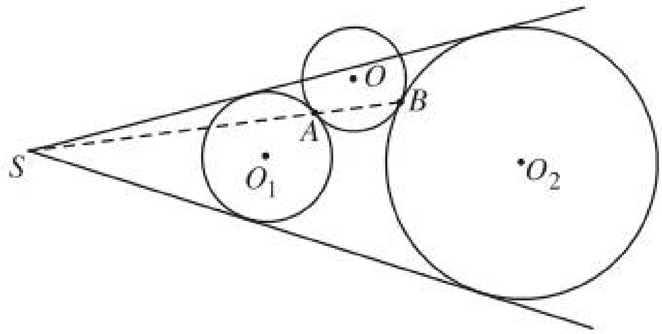
$$\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_2}=\frac{R_3}{R_1}$$

và biến đường tròn $(I_1\ ;\ R_1)$ thành đường tròn $(I_3\ ;\ R_3)$. Vậy tâm của phép vị tự hợp thành đó chính là điểm O_2^+. Suy ra ba điểm O_1^+, O_2^+, O_3^+ thẳng hàng. Chứng minh tương tự cho các bộ ba điểm còn lại.

56. (h.35)

Điểm A là tâm vị tự trong của (O_1) và (O), B là tâm vị tự trong của (O) và (O_2). Nếu gọi S là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2) thì theo bài tập 55, đường thẳng AB đi qua S.

Nếu thay "tiếp xúc ngoài" bằng "tiếp xúc trong", đường thẳng AB cũng đi qua S. (Chứng minh tương tự như trường hợp tiếp xúc ngoài).



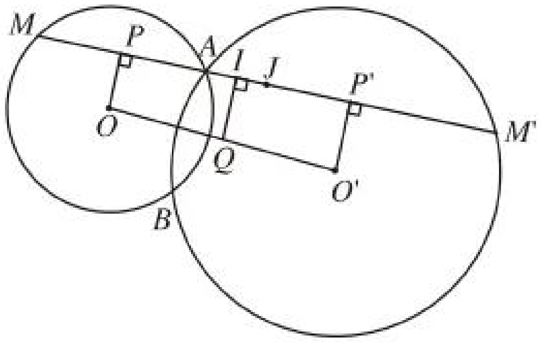
Hình 35

57. (h.36)

a) Gọi Q là trung điểm của OO' thì $QI \perp IA$. Suy ra quỹ tích I là đường tròn đường kính AQ.

b) Vì J là trung điểm MM' nên

$$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AM'}\right)$$
$$=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AP'}=2\overrightarrow{AI}\,.$$

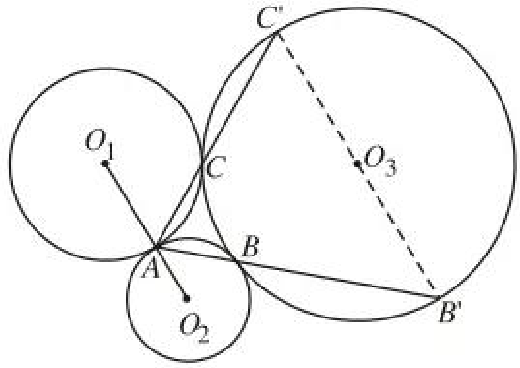


Hình 36

Vậy phép vị tự tâm A tỉ số 2 biến điểm I thành điểm J. Do đó, quỹ tích J là ảnh của đường tròn đường kính AQ qua phép vị tự đó.

58. (h.37)

Vì B là tâm vị tự trong của (O_2) và (O_3) nên O_2A // O_3B'. Vì C là tâm vị tự trong của (O_1) và (O_3) nên O_1A // O_3C'. Vì ba điểm O_1, A, O_2 thẳng hàng nên C', O_3, B' thẳng hàng. Như vậy $B'C'$ là đường kính của đường tròn (O_3).



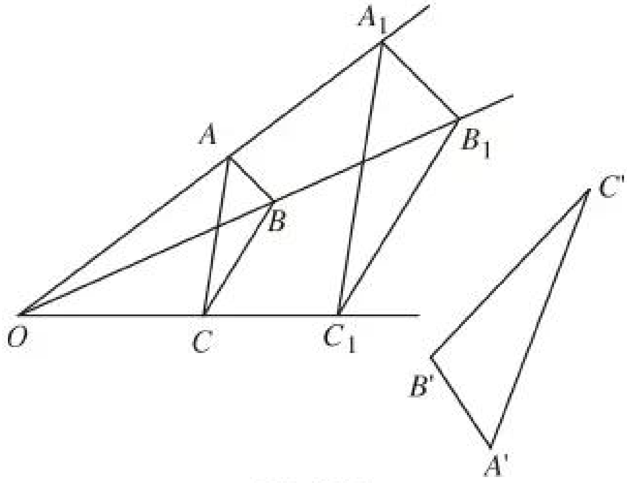
Hình 37

59. (h.38)

Giả sử hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k.$$

Chọn một điểm O nào đó và xét phép vị tự V tâm O tỉ số k thì V biến tam giác ABC thành tam giác $A_1B_1C_1$. Dễ thấy rằng hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A'B'C'$ bằng nhau. Do đó có phép dời hình F biến tam giác $A_1B_1C_1$ thành tam giác $A'B'C'$. Suy ra phép hợp thành của V và F là phép đồng dạng biến ABC thành $A'B'C'$.



Hình 38

60. a) Chú ý rằng $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DC}{DA} = k$

bởi vậy F biến tam giác ABD thành tam giác CAD.

b) Vì F biến đoạn thẳng BA thành AC và vì M, N lần lượt chia BA và AC theo cùng một tỉ số nên F biến M thành N, tức là góc (DM, DN) bằng góc quay φ.

Vậy tam giác DMN vuông tại D.

61. a) Dễ thấy rằng $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CD}{CA} = k$

bởi vậy F biến A thành D và biến B thành A. Do đó F biến tam giác ABC thành tam giác DAC.

b) Vì F biến đoạn thẳng AB thành DA nên biến M thành N. Bởi vậy, phép $Đ_c$ biến CM thành CN, suy ra c là phân giác của góc MCN.

62. Dựng tam giác $AB'C'$ sao cho $\widehat{A} = \alpha$, $\dfrac{AB'}{AC'} = k$.

Gọi $AB' + B'C' + AC' = m'$.

Phép vị tự tâm A tỉ số $\dfrac{m}{m'}$ sẽ biến tam giác $AB'C'$ thành tam giác ABC cần tìm.

63. Giả sử tam giác ABC có các đường cao AH, BI, CK và tam giác $A'B'C'$ có các đường cao $A'H'$, $B'I'$, $C'K'$ thoả mãn : $AH = A'H'$, $BI = B'I'$, $CK = C'K'$.

Trong tam giác ABC ta có $AB.CK = BC.AH = CA.BI$.

Cũng vậy, trong tam giác $A'B'C'$ ta có $A'B'.C'K' = B'C'.A'H' = C'A'.B'I'$.

Từ đó, suy ra $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'} = k$.

Như vậy, hai tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng. Do đó, có phép đồng dạng F tỉ số k biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Nhưng F biến đường cao AH thành đường cao $A'H'$ với $A'H' = AH$ nên $k = 1$. Do đó F là phép dời hình. Vậy tam giác ABC bằng tam giác $A'B'C'$.