

§6, §7. Phép vị tự. Phép đồng dạng

I - CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phép vị tự $V_{(O,k)}$ với tâm O và tỉ số k ($k \neq 0$) là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.
2. Phép vị tự tỉ số k biến đường thẳng thành đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng đó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$, biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$, biến góc thành góc bằng nó.
3. Phép vị tự biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.
4. Tâm vị tự của hai đường tròn : đó là tâm của phép vị tự V biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm vị tự đó gọi là tâm vị tự ngoài hay tâm vị tự trong tùy theo tỉ số của phép vị tự V là dương hay âm.
Hai đường tròn có bán kính khác nhau thì có một tâm vị tự ngoài và một tâm vị tự trong. Hai đường tròn có bán kính bằng nhau (tâm khác nhau) thì chỉ có tâm vị tự trong, đó chính là trung điểm đoạn thẳng nối tâm hai đường tròn.
5. Phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) là phép biến hình biến hai điểm tùy ý M, N thành hai điểm M', N' sao cho $M'N' = kMN$.
6. Mọi phép đồng dạng F tỉ số k là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D .
7. Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

II - ĐỀ BÀI

53. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ không bằng nhau nhưng có các cạnh tương ứng song song : $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ và $CA \parallel C'A'$. Chứng minh rằng có phép vị tự biến tam giác này thành tam giác kia.
54. Cho hai phép vị tự V_1 có tâm O_1 tỉ số k_1 và V_2 có tâm O_2 tỉ số k_2 . Gọi F là hợp thành của V_1 và V_2 . Chứng minh rằng :
- F là một phép tịnh tiến nếu $k_1 k_2 = 1$. Hãy xác định vectơ tịnh tiến.
 - F là một phép vị tự nếu $k_1 k_2 \neq 1$. Hãy xác định tâm và tỉ số của phép vị tự đó.
55. Cho ba đường tròn $(I_1 ; R_1)$, $(I_2 ; R_2)$, $(I_3 ; R_3)$ không đồng tâm và không bằng nhau. Gọi O_3^+ và O_3^- lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn $(I_1 ; R_1)$ và $(I_2 ; R_2)$; O_1^+ và O_1^- lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn $(I_2 ; R_2)$ và $(I_3 ; R_3)$; O_2^+ và O_2^- lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn $(I_3 ; R_3)$ và $(I_1 ; R_1)$. Chứng minh rằng mỗi bộ ba điểm sau đây thẳng hàng :
- $$O_1^+, O_2^+, O_3^+ ; O_1^+, O_2^-, O_3^- ; O_1^-, O_2^+, O_3^- \text{ và } O_1^-, O_2^-, O_3^+.$$
56. Cho hai đường tròn (O_1) , (O_2) ngoài nhau và không bằng nhau. Một đường tròn (O) thay đổi tiếp xúc ngoài với (O_1) và (O_2) . Gọi các tiếp điểm tương ứng là A và B . Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn luôn đi qua một điểm cố định. Nếu thay giả thiết "tiếp xúc ngoài" bằng "tiếp xúc trong" thì kết quả trên sẽ thay đổi như thế nào ?
57. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Một đường thẳng thay đổi đi qua A cắt (O) ở A và M , cắt (O') tại A và M' . Gọi P và P' lần lượt là trung điểm của AM và AM' .
- Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng PP' .
 - Tìm quỹ tích trung điểm J của đoạn thẳng MM' .
58. Cho ba đường tròn (O_1) , (O_2) , (O_3) đôi một tiếp xúc ngoài với nhau, A là tiếp điểm của (O_1) và (O_2) ; B là tiếp điểm của (O_2) và (O_3) ; C là tiếp điểm của (O_3) và (O_1) . Đường thẳng AB cắt (O_3) tại điểm thứ hai B' , đường thẳng AC cắt (O_3) tại điểm thứ hai C' . Chứng minh $B'C'$ là đường kính của (O_3) .

59. Chứng minh rằng nếu hai tam giác có các cạnh tương ứng tỉ lệ thì có phép đồng dạng biến tam giác này thành tam giác kia.
60. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AD . Gọi V là phép vị tự tâm D tỉ số $k = \frac{DA}{DB}$ và Q là phép quay tâm D góc quay $\varphi = (DB, DA)$, F là hợp thành của V và Q .

a) Phép F biến tam giác ABD thành tam giác nào ?

b) Lấy hai điểm M và N lần lượt nằm trên hai cạnh BA và AC sao cho

$$\frac{BM}{MA} = \frac{AN}{NC}.$$

Chứng minh rằng DMN là tam giác vuông.

61. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AD . Gọi c là phân giác của góc C , D_c là phép đối xứng qua c , V là phép vị tự tâm C tỉ số $k = \frac{CA}{CB}$ và F là hợp thành của D_c và V .

a) F biến tam giác ABC thành tam giác nào ?

b) Lấy hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai đoạn thẳng AB và DA sao cho

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NA}.$$

Chứng minh rằng c là phân giác của góc MCN .

62. Dựng tam giác ABC biết góc A bằng α , tỉ số $\frac{AB}{AC} = k$ và chu vi tam giác bằng m .
63. Chứng minh rằng nếu hai tam giác có các đường cao tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.