

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. ĐỀ BÀI

1. Cho đường thẳng a và vectơ \vec{u} có giá vuông góc với a . Gọi F là phép hợp thành của đối xứng trục D_a và tịnh tiến $T_{\vec{u}}$. Với điểm M bất kì, gọi $M' = F(M)$ và I là trung điểm của MM' .
 - a) Tìm quỹ tích của I khi M thay đổi.
 - b) Chứng minh rằng F là phép đối xứng trục.
2. Cho điểm O nằm trên đường thẳng a . Gọi D là phép đối xứng qua đường thẳng a , Q là phép quay tâm O góc quay φ và F là phép hợp thành của D và Q . Với điểm M bất kì, gọi $M' = F(M)$ và I là trung điểm của MM' .
 - a) Tìm quỹ tích của I khi M thay đổi.
 - b) Chứng minh rằng F là phép đối xứng trục.
3. Cho đường tròn $(O ; R)$ và một điểm A cố định, một điểm M thay đổi trên đường tròn. Tìm quỹ tích các điểm N sao cho $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}$.
4. Cho đường tròn $(O ; R)$ và hai điểm A, B cố định. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Gọi N là điểm đối xứng với M qua A , điểm M' đối xứng với N qua B . Tìm quỹ tích các điểm M' .
5. Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau và không vuông góc với nhau, điểm O không nằm trên chúng. Hãy xác định điểm A nằm trên a và điểm B nằm trên b sao cho tam giác OAB vuông cân tại đỉnh O .
6. Cho ba điểm A, B, C . Gọi D_A, D_B, D_C là các phép đối xứng tâm có tâm lần lượt là A, B và C . Chứng minh rằng hợp thành của ba phép đối xứng tâm nói trên là một phép đối xứng tâm.
7. Cho năm điểm M, N, P, Q, R . Hãy xác định ngũ giác $ABCDE$ sao cho M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EA của ngũ giác đó.

8. Cho đường tròn $(O ; R)$ và hai điểm A, B cố định sao cho đường thẳng AB không cắt đường tròn. Một điểm M thay đổi trên đường tròn.
- Tìm quỹ tích điểm N sao cho $ABMN$ là hình bình hành.
 - Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABM .
9. Cho đường thẳng a và điểm G không nằm trên a . Với hai điểm phân biệt A, B thay đổi trên a , ta lấy điểm C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm quỹ tích điểm C .
10. Cho phép vị tự V có tâm O tỉ số k và phép vị tự V' có tâm O' tỉ số k' , biết rằng O, O' là hai điểm phân biệt và $kk' = 1$. Chứng minh rằng hợp thành của V và V' là một phép tịnh tiến.
11. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm K, N lần lượt là trung điểm của SA và CB . Điểm M thuộc cạnh SC sao cho $\frac{SM}{MC} = \frac{2}{3}$.
- Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ASC và AKM .
 - Mặt phẳng qua K và song song với hai đường thẳng AB và SC có qua điểm N hay không ?
 - Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(KMN).
 - Chứng minh rằng đường thẳng KN chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.
12. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với M là trung điểm của CD .
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MAA_1) và (BDD_1B_1) .
 - Dựng đường thẳng Δ qua M cắt cả BD_1 và AA_1 .
 - Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của Δ với BD_1 và AA_1 . Tính tỉ số $\frac{MP}{MQ}$.
 - Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(B, Δ).
13. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua các đỉnh A, B, C, D dựng các đường thẳng a, b, c, d tương ứng song song với nhau và không thuộc mp($ABCD$). Trên mỗi đường thẳng a, b, c, d lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 . Chứng minh rằng :

- a) Nếu các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 không đồng phẳng thì đường thẳng nối trung điểm của A_1C_1 và trung điểm của B_1D_1 luôn đi qua một điểm cố định.
- b) Bốn điểm A_1, B_1, C_1, D_1 đồng phẳng khi và chỉ khi trung điểm của A_1C_1 trùng với trung điểm của B_1D_1 .
- c) Nếu bốn đường thẳng AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 đôi một cắt nhau thì $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là một hình hộp.
- 14.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không nằm trong một mặt phẳng. M là một điểm của cạnh AD , N là một điểm chuyển động trên cạnh BE sao cho $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BE}$.
- a) Chứng minh rằng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.
- b) Tìm tập hợp trung điểm G của đoạn thẳng MN .
- 15.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = 2a$, $CD = a$, $AD = 3a$; M là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng AD .
- a) Xác định vị trí điểm M để hai đường thẳng BM và CM vuông góc với nhau.
- b) Gọi S là điểm thuộc đường thẳng vuông góc với mp(ABC) kẻ từ điểm M sao cho $SM = AM$. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với SA . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) là hình gì? Tính diện tích thiết diện thu được theo a và x , ở đây $x = AM$ ($0 < x \leq 3a$).
- 16.** Cho hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau và vuông góc với nhau. (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ' và vuông góc với Δ , gọi I là giao điểm của (P) và Δ . Lấy điểm A cố định thuộc Δ ($A \neq I$). Hai điểm B, C thay đổi trên Δ' sao cho mp(B, Δ) vuông góc với mp(C, Δ). Gọi AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC . Chứng minh rằng :
- a) $AB^2 + AC^2 - BC^2$ không đổi.
- b) $A'B.A'C$ không đổi và trực tâm của tam giác ABC là điểm cố định.
- c) Các điểm B', C' thuộc một đường tròn cố định.
- 17.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$. Xét hai tia At, Ct' cùng chiều và cùng vuông góc với mp(ABC). Lấy điểm M thuộc At , N thuộc Ct' ($M \neq A, N \neq C$). Đặt $AM = m$, $CN = n$.
- a) Tính góc giữa các mặt phẳng (MBD) và (NBD) với mặt phẳng ($ABCD$).

- b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (NBD) . Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, m, n để hai mặt phẳng đó vuông góc.
- c) Khi $a = b$ và $\text{mp}(MBD)$ vuông góc với $\text{mp}(NBD)$, hãy tính đường cao OI của tam giác MON (trong đó O là giao điểm của AC và BD), từ đó suy ra hai mặt phẳng (BMN) và (DMN) vuông góc với nhau.
- 18.** Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn tâm O , bán kính R . Điểm A cố định thuộc đường tròn, đường kính BC quay quanh O , (BC không trùng với OA). Đặt $\widehat{ABC} = \alpha$. Điểm S nằm trong không gian sao cho SA vuông góc với (P) và $SA = 2R$.
- a) Chứng minh rằng chân đường cao SH của tam giác SBC thuộc một đường tròn cố định.
- b) Xác định α để diện tích tam giác SBC đạt giá trị lớn nhất, hãy tính giá trị đó.
- 19.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a . Lấy điểm B_1 thuộc BB' , điểm C_1 thuộc CC' . Đặt $BB_1 = x, CC_1 = y$.
- a) Tam giác AB_1C_1 có thể vuông ở A được không? Tìm hệ thức liên hệ giữa a, x, y để AB_1C_1 là tam giác vuông tại B_1 .
- b) Giả sử AB_1C_1 là tam giác thường và B_1 là trung điểm của BB' , $y = 2x$ và α là góc giữa $\text{mp}(ABC)$ và $\text{mp}(AB_1C_1)$. Hãy tính diện tích tam giác AB_1C_1 và độ dài cạnh bên của hình lăng trụ đã cho.