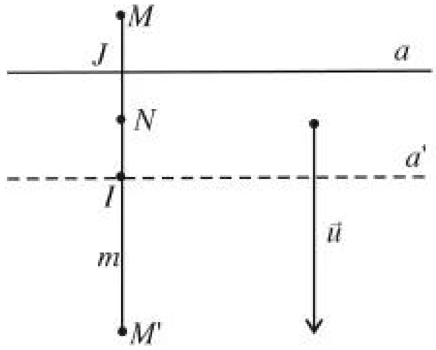
B. ĐÁP ÁN

1. (h.228)

a) Nếu $Đ_a$ biến điểm M thành điểm N thì $T_{\vec{u}}$ biến điểm N thành điểm M' tức là $\overrightarrow{NM'} = \vec{u}$. Vì vectơ $\vec{u}$ có giá vuông góc với a nên ba điểm M, N và M' cùng nằm trên đường thẳng m vuông góc với a. Gọi J là trung điểm của MN thì J nằm trên a và ta có :



Hình 228

$$\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM'} - \overrightarrow{MN}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{NM'} = \frac{\vec{u}}{2}.$$

Như vậy I là ảnh của J qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{\vec{u}}{2}$, suy ra quỹ tích I là đường thẳng a' ảnh của a qua phép tịnh tiến đó.

b) Từ câu a), ta suy ra a' là trung trực của đoạn thẳng MM'. Suy ra F là phép đối xứng trục với trục là đường thẳng a'.

2. (h.229)

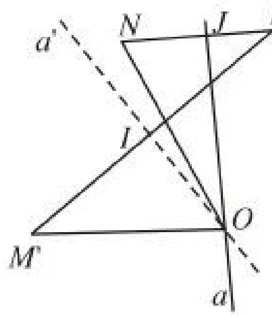
a) Nếu $Đ$ biến điểm M thành điểm N thì Q biến điểm N thành điểm M'. Gọi J là trung điểm MN thì J nằm trên a và OJ là phân giác của góc MON.

Ta có

$$\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OI}\right)=\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OI}\right)-\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OJ}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)-\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM'}\right)=\frac{\varphi}{2}.$$



Hình 229

Như vậy nếu gọi Q' là phép quay tâm O góc quay $\frac{\varphi}{2}$ thì Q biến đường thẳng OJ (tức là đường thẳng a) thành đường thẳng OI. Vậy quỹ tích của I là đường thẳng a', ảnh của a qua phép quay Q'.

b) Từ câu a) ta suy ra a' là trung trực của đoạn thẳng MM'. Suy ra F là phép đối xứng trục với trục là đường thẳng a'.

3. Từ $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}$ suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}$. Gọi T là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OA}$ thì T biến M thành N. Vậy quỹ tích các điểm N là ảnh của đường tròn $(O\ ;\ R)$ qua phép tịnh tiến T, đó là đường tròn tâm A bán kính R.

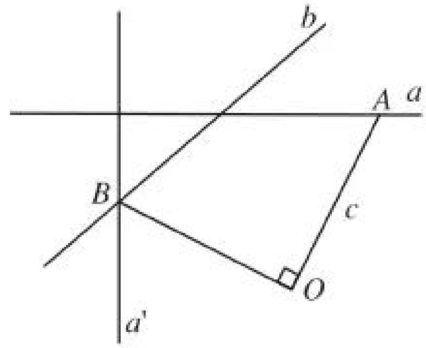
4. *Hướng dẫn.* Chứng minh $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{AB}$. Quỹ tích các điểm M' là đường tròn ảnh của đường tròn $(O\ ;\ R)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$.

5. (h.230) Giả sử đã xác định được hai điểm A, B theo yêu cầu của bài toán.

Vì $\widehat{AOB} = 90^{\circ}$ nên góc lượng giác $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$.

Xét trường hợp $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Gọi Q là phép quay tâm O với góc quay $\frac{\pi}{2}$ và a' là ảnh của đường thẳng a qua phép Q. Vì Q biến điểm A thành điểm B nên B cũng nằm trên đường thẳng a', nói cách khác B là giao điểm của a' và b.



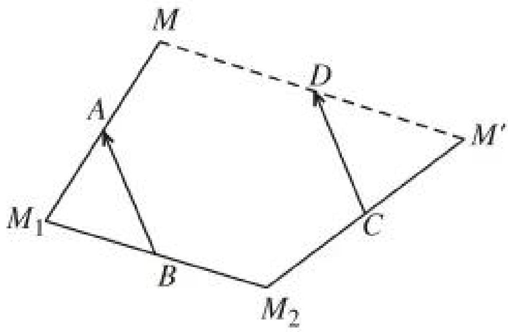
Hình 230

Vậy ta có cách xác định điểm B như sau : Xác định đường thẳng a' là ảnh của đường thẳng a qua phép quay Q rồi lấy giao điểm B của a' và b. (Chú ý rằng a' vuông góc với a còn b không vuông góc với a nên a' và b cắt nhau). Để xác định điểm A ta vẽ đường thẳng c đi qua O và vuông góc với OB thì c sẽ cắt a tại A. Vậy OAB là tam giác vuông cân cần tìm.

Đối với trường hợp $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ta cũng làm tương tự và được tam giác vuông cân $OA'B'$ với A' nằm trên a và B' nằm trên b.

Bài toán có hai nghiệm hình.

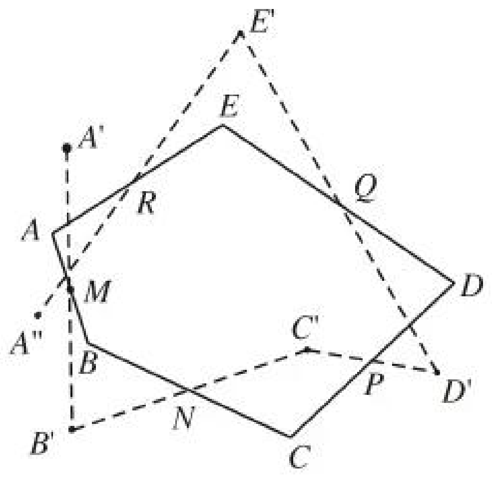
6. (h.231) Gọi F là phép hợp thành của ba phép đối xứng $Đ_A$, $Đ_B$ và $Đ_C$. Gọi M là điểm bất kì sao cho $M_1 = Đ_A(M)$, $M_2 = Đ_B(M_1)$, $M' = Đ_C(M_2)$, có nghĩa là các điểm A, B, C lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng MM_1, M_1M_2, M_2M'.



Hình 231

Từ đó nếu ta gọi D là trung điểm của đoạn thẳng MM' thì $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, tức D là điểm xác định không phụ thuộc vào M. Theo định nghĩa của phép hợp thành F thì F biến điểm M thành điểm M'. Vì D là trung điểm của MM' nên F là phép đối xứng tâm với tâm là D.

7. (h.232) Giả sử đã xác định được ngũ giác $ABCDE$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Lấy một điểm A' bất kì, và xác định các điểm B', C', D', E', A'' như sau : B' là điểm đối xứng của A' qua M, C' là điểm đối xứng của B' qua N, D' là điểm đối xứng của C' qua P, E' là điểm đối xứng của D' qua Q, và A'' là điểm đối xứng của E' qua R.



Hình 232

Theo các tính chất của phép đối xứng tâm ta có:

$$\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$$

$$= -\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{EE'} = -\overrightarrow{AA''}.$$

Suy ra $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{AA''}$, do đó A là trung điểm của đoạn thẳng $A'A''$.

Từ đó suy ra cách dựng: Lấy điểm A' tuỳ ý rồi dựng các điểm B', C', D', E', A'' như trên. Dựng A là trung điểm của đoạn thẳng $A'A''$. Có điểm A ta dễ dàng dựng được các điểm B, C, D và E.

8. a) Vì tứ giác $ABMN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$. Vậy phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$ biến điểm M thành điểm N. Suy ra quỹ tích các điểm N là ảnh của đường tròn $(O\ ;\ R)$ qua phép tịnh tiến đó.

b) Gọi I là trung điểm AB thì $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$. Vậy phép vị tự $V_{\left(I, \frac{1}{3}\right)}$ biến điểm M thành điểm G. Từ đó suy ra quỹ tích các điểm G là đường tròn ảnh của đường tròn $(O\ ;\ R)$ qua phép vị tự nói trên.

9. *Hướng dẫn*. Gọi M là trung điểm AB thì phép vị tự V tâm G tỉ số -2 biến M thành C. Vì M di chuyển trên a nên quỹ tích của C là ảnh của a qua phép vị tự V.

10. (h.233) Lấy điểm M tuỳ ý và giả sử V biến điểm M thành điểm N và V' biến điểm N thành điểm M'.

Khi đó ta có :

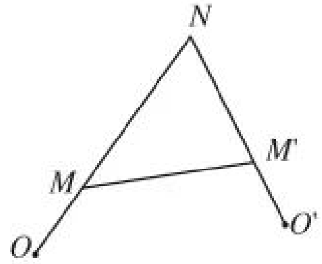
$$\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{O'M'} = k'\overrightarrow{O'N}.$$

Suy ra (với chú ý rằng $kk' = 1$)

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'O'}$$

$$= \frac{1}{k}\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{MM'} - k'\overrightarrow{O'N}$$

$$= \overrightarrow{MM'} + \frac{1}{k}(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NO'}) = \overrightarrow{MM'} + \frac{1}{k}\overrightarrow{OO'}.$$



Hình 233

Như vậy, ta có $\overrightarrow{MM'} = (1 - k')\overrightarrow{OO'}$. (*)

Vì phép hợp thành của V và V' biến M thành M' nên từ (*) ta suy ra phép hợp thành đó là phép tịnh tiến theo vectơ $(1 - k')\overrightarrow{OO'}$.

11. (h.234)

a) Từ C và M ta lần lượt kẻ các đường CH, MH' cùng vuông góc với SA (H, H' cùng thuộc SA).

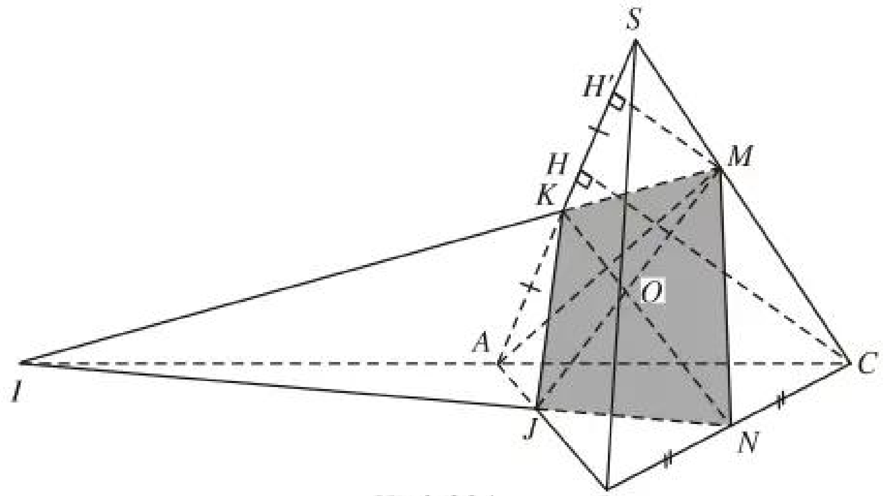
Ta có $$\frac{S_{ASC}}{S_{AKM}} = \frac{\frac{1}{2}SA.CH}{\frac{1}{2}AK.MH'} = 2.\frac{CH}{MH'} = 2.\frac{SC}{SM} = 2.\frac{5}{2} = 5.$$

b) Gọi :

(P) là mặt phẳng qua K, song song với AB và SC ;

(Q) là mặt phẳng qua AB và song song với SC ;

(R) là mặt phẳng qua SC và song song với AB.



Hình 234

Khi đó ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một song song.

Gọi $N' = BC \cap (P)$. Theo định lí Ta-lét, ta có

$$\frac{CN'}{N'B} = \frac{SK}{KA} = 1 \Rightarrow CN' = N'B$$

do đó N' là trung điểm của BC, tức $N' \equiv N$.

Vậy mp(P) qua điểm N.

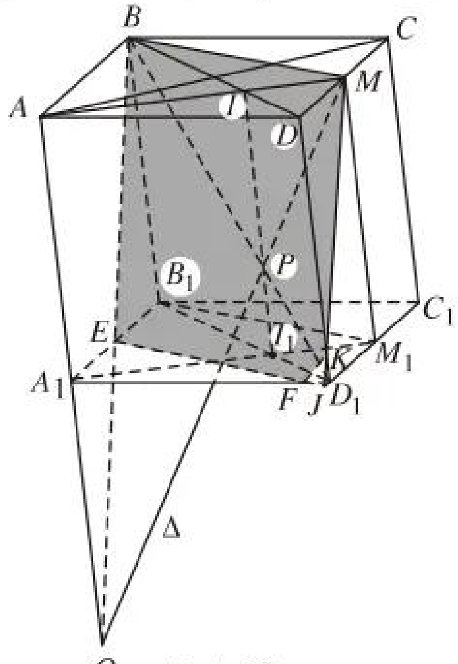
c) Kéo dài MK cắt AC tại I ; nối IN cắt BA tại J. Vậy tứ giác $MNJK$ là thiết diện cần tìm.

d) Gọi O là giao điểm của KN và MJ thì O là giao điểm của mp(P) với JM. Ba mặt phẳng song song (R), (P), (Q) lần lượt cắt SA và MJ tại các điểm S, K, A và M, O, J. Theo định lí Ta-lét, ta có O là trung điểm của MJ (do K là trung điểm của SA). Từ đó, dễ thấy

$$S_{KOM} = S_{KOJ} \; ; S_{NMO} = S_{NOJ}.$$

Vậy $S_{MKN} = S_{JKN}$ tức là đường thẳng KN chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.

12. (h.235)



Hình 235

a) Gọi I là giao điểm của AM và BD, M_1 là trung điểm của C_1D_1, I_1 là giao điểm của A_1M_1 với B_1D_1. Dễ thấy II_1 chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (MAA_1) và (BDD_1B_1).

b) Giả sử đường thẳng Δ cần tìm cắt BD_1 và AA_1 lần lượt tại P và Q. Khi đó P chính là giao điểm của BD_1 với mp(MAA_1). Vậy P là giao điểm của BD_1 và II_1. Từ đó, suy ra cách dựng đường thẳng Δ như sau :

– Lấy giao điểm P của BD_1 và II_1.

– Vẽ đường thẳng MP.

Khi đó, đường thẳng MP chính là đường thẳng Δ cần tìm.

c) Ta có $DM \,//\, AB \Rightarrow \dfrac{IM}{IA} = \dfrac{MD}{AB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{IM}{IA} = \dfrac{1}{2}$

và $IP \,//\, AQ \Rightarrow \dfrac{MP}{PQ} = \dfrac{MI}{IA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{MP}{PQ} = \dfrac{1}{2}.$

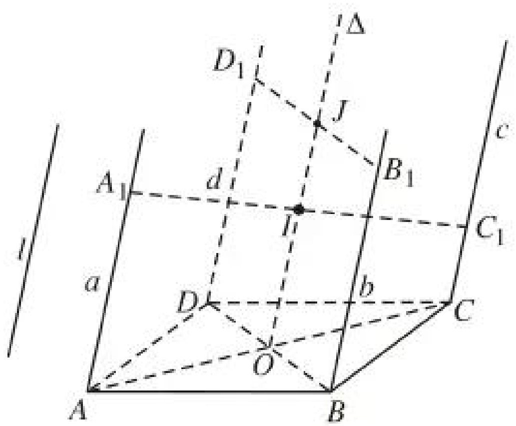
Suy ra $\dfrac{MP}{MP + PQ} = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{1}{3}.$

d) Nối B với Q cắt A_1B_1 tại E. Từ E kẻ $EF \,//\, B_1M_1$ cắt A_1D_1 tại F. Gọi J là giao điểm của EF với C_1D_1. Nối J với M cắt DD_1 tại K.

Vậy thiết diện là ngũ giác $BEFKM$.

13. a) (h.236)

Xét phép chiếu song song lên mp($ABCD$) theo phương chiếu $l \,//\, a$. Khi đó A_1C_1 có hình chiếu là AC nên trung điểm I của A_1C_1 có hình chiếu là trung điểm O của AC. Tương tự, trung điểm J của B_1D_1 có hình chiếu là trung điểm O của BD. Do đó, ba điểm I, J, O phải nằm trên một đường thẳng Δ. Đường thẳng Δ này đi qua điểm cố định O.



Hình 236

b) • Nếu A_1, B_1, C_1, D_1 đồng phẳng thì $A_1B_1 \,//\, C_1D_1$ vì chúng là giao tuyến của mp($A_1B_1C_1D_1$) với hai mặt phẳng song song (ABB_1A_1), (DCC_1D_1).

Tương tự, ta có $A_1D_1 \,//\, B_1C_1$. Vậy tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là một hình bình hành. Do đó trung điểm I của A_1C_1 trùng với trung điểm J của B_1D_1.

• Ngược lại, nếu I trùng với J thì các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 cùng nằm trên mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau A_1C_1 và B_1D_1.

c) (h.237)

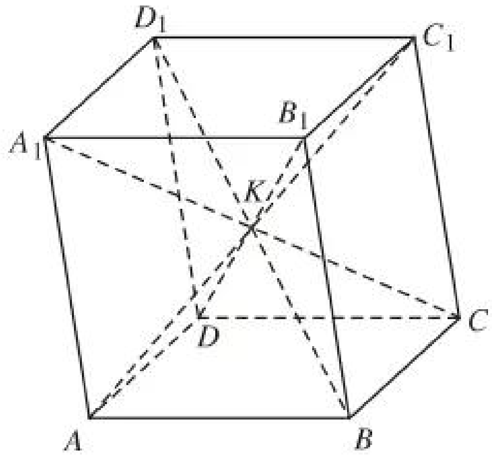
Giả sử AC_1 cắt BD_1 tại K. Khi đó, ta có

$mp(AC_1, BD_1) \equiv mp(ABC_1D_1)$.

Mặt phẳng này cắt hai mặt phẳng song song (ABB_1A_1), (DCC_1D_1) theo hai giao tuyến song song AB và C_1D_1, suy ra $C_1D_1 \parallel CD$. Mặt khác $DD_1 \parallel CC_1$.

Vậy tứ giác CDD_1C_1 là hình bình hành. Do đó

$$CD = C_1D_1 \Rightarrow C_1D_1 = BA.$$



Hình 237

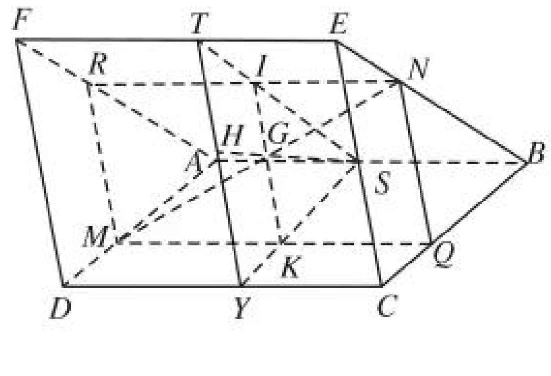
Như vậy ABC_1D_1 là hình bình hành và K là trung điểm của AC_1 và BD_1.

Tương tự, nếu BD_1 cắt CA_1 tại K' thì BCD_1A_1 là hình bình hành và K' là trung điểm của BD_1 và CA_1 nên $K' \equiv K$.

Tương tự, ta cũng suy ra K là trung điểm của B_1D, các mặt ABB_1A_1, BCC_1B_1 đều là hình bình hành và từ đó $A_1B_1C_1D_1$ cũng là hình bình hành. Vậy $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp.

14. (h.238)

a) Kẻ $MQ \parallel AB$ ($Q \in BC$), kẻ $NR \parallel AB$ ($R \in AF$). Dễ thấy tứ giác $MQNR$ là hình bình hành có các cạnh lần lượt song song với AB và EC. Từ đó suy ra MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(CDFE)$.



Hình 238

b) Gọi S, T, Y lần lượt là trung điểm của AB, EF, CD ; I, K lần lượt là trung điểm của NR và QM. Khi đó, dễ thấy G là trung điểm của IK và I, K lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng NR và ST, MQ và SY.

Gọi H là trung điểm của TY, thì rõ ràng S, G, H thẳng hàng và SH là đường trung tuyến của tam giác cố định STY. Vậy tập hợp các điểm G là đường trung tuyến SH của tam giác STY.

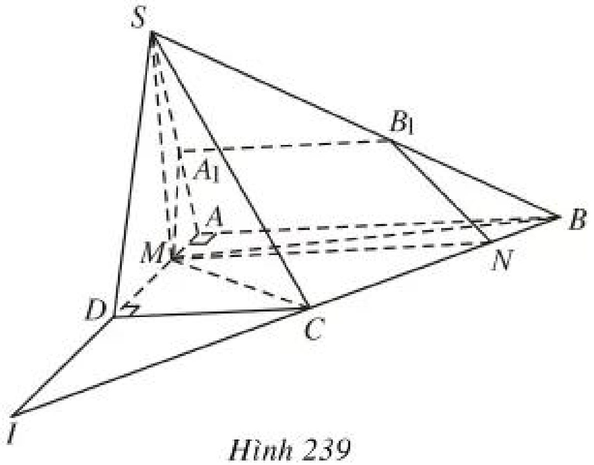
Hướng dẫn phần đảo. Lấy một điểm G bất kì trên đoạn thẳng SH, qua G kẻ đường thẳng $IK \parallel TY$ ($I \in ST$, $K \in SY$). Qua I và K lần lượt kẻ các đường thẳng NR và MQ cùng song song với AB ($N \in EB, R \in AF, M \in AD, Q \in BC$). Sau đó chứng minh G là trung điểm của MN và $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{BN}{BE}$.

15. (h.239)

a) Đặt $AM = x$ thì $DM = 3a - x$. Dễ thấy $BC = a\sqrt{10}$.

$$MB^2 = 4a^2 + x^2$$

$$MC^2 = a^2 + (3a - x)^2.$$



Hình 239

Hai đường thẳng BM và CM vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$BC^2 = MB^2 + MC^2$$

$$\Leftrightarrow 10a^2 = 2x^2 + 14a^2 - 6ax$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = a, x = 2a.$$

Vậy có hai vị trí của điểm M để MB và MC vuông góc với nhau.

b) Vì $SM \perp (ABCD)$, $AB \perp MA$ nên $AB \perp SA$ (định lí ba đường vuông góc). Mặt khác $(P) \perp SA$ nên $(P) \parallel AB$.

Do $MA = MS$, (P) đi qua M và $(P) \perp SA$ nên (P) cắt SA tại trung điểm A_1 của SA. Từ đó (P) cắt (SAB) theo giao tuyến A_1B_1 với $A_1B_1 \parallel AB$; (P) cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến MN song song với AB. Như vậy, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mp(P) là hình thang vuông MA_1B_1N (tứ giác MA_1B_1N là hình thang vuông vì $MN \parallel A_1B_1$, ngoài ra $AB \perp (SAD)$ nên $A_1B_1 \perp (SAD)$, tức là $A_1B_1 \perp MA_1$).

$$S_{MA_1B_1N} = \frac{1}{2}(A_1B_1 + MN).A_1M$$

$$A_1B_1 = \frac{1}{2}AB = a,\ A_1M = \frac{1}{2}SA = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Gọi I là giao điểm của AD và BC thì $IA = 6a$. Ta có

$$\frac{MN}{AB} = \frac{IM}{IA} \Leftrightarrow \frac{MN}{2a} = \frac{6a - x}{6a}$$

$$\Rightarrow \quad MN = \frac{6a - x}{3}.$$

Vậy $S_{MA_1B_1N} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{6a - x}{3}\right)\cdot\frac{x\sqrt{2}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{2}(9a - x)x}{12} \text{ (với } 0 < x \leq 3a).$$

16. (h.240)

Ta có $AI \perp (IBC)$ nên $\widehat{BIC}$ hoặc $180^o - \widehat{BIC}$ là góc giữa mp(B, Δ) và mp(C, Δ). Theo giả thiết mp(B, Δ) $\perp$ mp(C, Δ) nên $\widehat{BIC} = 90^o$. Như vậy tứ diện $IABC$ có IA, IB, IC đôi một vuông góc.

a) Ta có

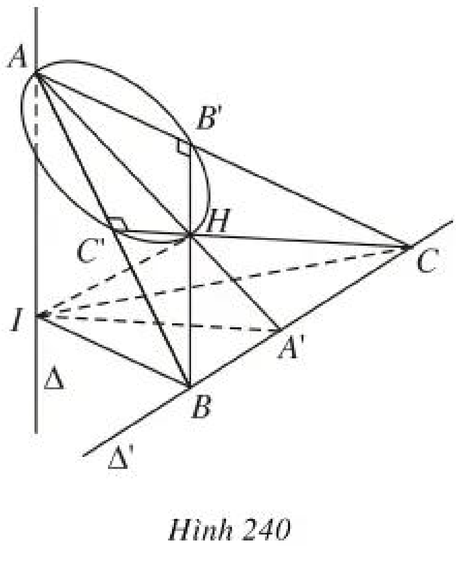
$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = AI^2 + IB^2 + AI^2 + IC^2 - BC^2 = 2AI^2.$$

Điều này khẳng định $AB^2 + AC^2 - BC^2$ không đổi.

b) Dễ thấy IA' là đường cao của tam giác vuông IBC. Vậy

$A'B.A'C = IA'^2$. Vì $IA' \perp \Delta'$ nên IA' là cố định, do đó $A'B.A'C$ không đổi.

Vì $IABC$ là tứ diện có các cạnh IA, IB, IC đôi một vuông góc nên trực tâm của tam giác ABC là hình chiếu H của điểm I trên mặt phẳng (ABC) (trùng với mặt phẳng (A, Δ')). Vậy trực tâm H của tam giác ABC là điểm cố định.



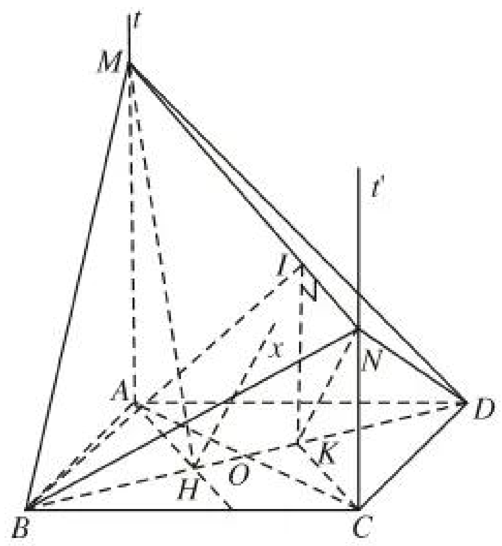
Hình 240

c) Ta có B', C' thuộc mp(A, Δ').

$$\widehat{AB'H} = \widehat{AC'H} = 90^{\circ}.$$

Vậy B', C' thuộc đường tròn đường kính AH trong mp(A, Δ'). Đường tròn này cố định.

17. (h.241)



Hình 241

a) Kẻ $AH \perp BD$. Do $MA \perp (ABCD)$ nên $MH \perp BD$ (định lí ba đường vuông góc).

Ta có MAH là tam giác vuông tại A nên $\widehat{MHA}$ là góc giữa mp(MBD) với mp($ABCD$). Đặt $\widehat{MHA} = \alpha$ thì

$$\tan\alpha = \frac{MA}{AH}, MA = m,$$

$$AH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{m\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$

Vậy góc giữa mặt phẳng (MBD) và mặt phẳng ($ABCD$) là α mà

$$\tan\alpha = \frac{m\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$

Tương tự, ta có $\widehat{NKC}$ là góc giữa mp(NBD) với mp($ABCD$) và đặt $\widehat{NKC} = \beta$ thì

$$\tan\beta = \frac{n\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$

Vậy góc giữa mặt phẳng (NBD) và mặt phẳng ($ABCD$) là β mà

$$\tan\beta = \frac{n\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$

b) Kẻ Hx song song với KN, do AH // KC và At, Ct' nằm về một phía của ($ABCD$) nên $\widehat{MHx}$ hoặc $180^{\circ} - \widehat{MHx}$ là góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (NBD).

Đặt $\widehat{MHx} = \gamma$ thì $\gamma = 180^{\circ} - (\alpha + \beta)$

$$\tan\gamma = -\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}(m+n)ab}{mn(a^2+b^2) - a^2b^2}.$$

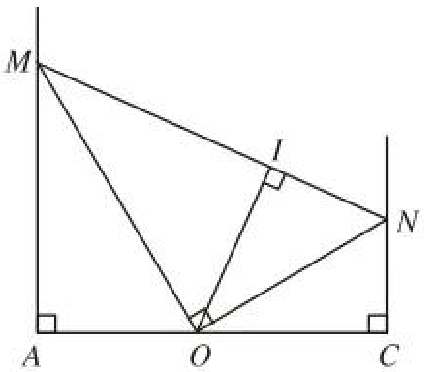
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (NBD) là φ mà

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{a^2+b^2}(m+n)ab}{\left|mn(a^2+b^2) - a^2b^2\right|}.$$

Từ đó, suy ra mặt phẳng (MBD) và mặt phẳng (NBD) vuông góc khi và chỉ khi $mn(a^2+b^2) - a^2b^2 = 0$ hay $mn = \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

c) Khi $a = b$ thì $H \equiv K \equiv O$ và mp$(MBD) \perp$ mp(NBD) tức là $mn = \dfrac{a^2}{2}\cdot$

Gọi OI là đường cao của tam giác vuông OMN (h.242).



Hình 242

Ta có $OI = \dfrac{2S_{MON}}{MN}$

$$2S_{MON} = 2\left[S_{ACNM} - \left(S_{AMO} + S_{CNO}\right)\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}(m+n)a\sqrt{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot m - \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}n\right)$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2}(m+n).$$

$$MN = \sqrt{(m-n)^2 + 2a^2} = \sqrt{(m-n)^2 + 4mn} = m+n.$$

Từ đó $OI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot$

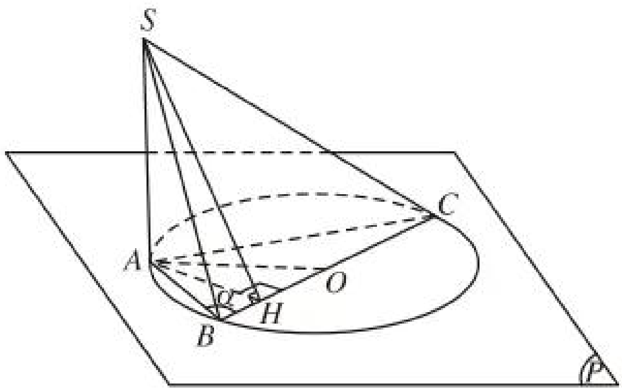
Vậy BID là tam giác vuông tại I.

Mặt khác $BD \perp (MACN)$ nên $BD \perp MN$; kết hợp với $OI \perp MN$ ta có $MN \perp (BID)$.

Vì $\widehat{BID} = 90^{\circ}$ nên hai mặt phẳng (BMN) và (DMN) vuông góc với nhau.

18. (h.243)

a) Vì $SA \perp (P)$ và $SH \perp BC$ nên $AH \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc) hay $\widehat{AHO} = 90^o$. Như vậy H thuộc đường tròn đường kính AO trong mp(P). Đường tròn này cố định.



Hình 243

b) $S_{SBC} = \frac{1}{2}BC.SH = R.SH.$

Do đó S_{SBC} lớn nhất khi và chỉ khi SH lớn nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi AH lớn nhất, tức là H và O trùng nhau, khi đó $\alpha = 45^o$.

Khi $\alpha = 45^o$ thì $S_{SBC} = R.\sqrt{4R^2 + R^2} = R^2\sqrt{5}$.

19. (h.244)

a) • Tam giác AB_1C_1 vuông ở A khi và chỉ khi

$$B_1C_1^2 = AB_1^2 + AC_1^2.$$

Mặt khác

$$B_1C_1^2 = a^2 + (x-y)^2$$

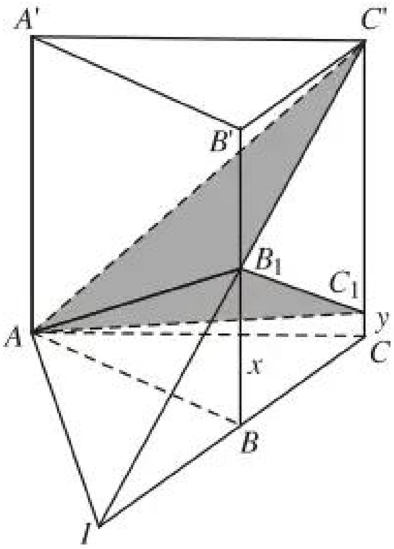
$$AB_1^2 = a^2 + x^2$$

$$AC_1^2 = a^2 + y^2.$$

Do đó tam giác AB_1C_1 vuông ở A khi và chỉ khi

$$a^2 + (x-y)^2 = 2a^2 + x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2xy = -a^2.$$



Hình 244

Điều này không xảy ra. Vậy tam giác AB_1C_1 không thể vuông tại A được.

• Tam giác AB_1C_1 vuông tại B_1 khi và chỉ khi

$$AC_1^2 = AB_1^2 + B_1C_1^2 \Leftrightarrow a^2 + y^2 = a^2 + x^2 + a^2 + (x-y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2xy = 2x^2 + a^2.$$

Đó là hệ thức liên hệ giữa a, x, y để tam giác AB_1C_1 vuông tại B_1.

b) Khi B_1 là trung điểm của BB', $y = 2x$ thì C_1 trùng với C'.

Gọi $I = BC \cap B_1C'$ thì $AI = (AB_1C') \cap (ABC)$.

Vì $B_1B = \frac{1}{2}BB'$ nên $BI = BC$, từ đó ta có IAC là tam giác vuông tại A, tức là $AC \perp AI$.

Mặt khác, $C'C \perp (ABC)$ nên $AC' \perp AI$ (định lí ba đường vuông góc).

Như vậy $\widehat{C'AC}$ là góc giữa mp(AB_1C') và mp(ABC).

Theo giả thiết thì $\widehat{C'AC} = \alpha$.

Từ đó $\quad S_{ABC} = S_{AB_1C_1}\cos\alpha$

tức là $\quad S_{AB_1C_1} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos\alpha}$.

Như vậy $\quad S_{AB_1C_1} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$.

Ta cũng có $\quad CC' = AC\tan\alpha = a\tan\alpha$.

Vậy độ dài cạnh bên của hình lăng trụ đã cho là $a\tan\alpha$.