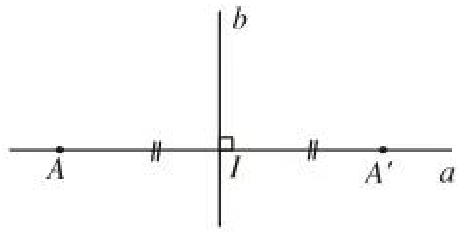
Bài tập ôn tập chương I

64. (h.39)

Gọi a là đường thẳng đi qua A và A', b là đường thẳng đi qua I và vuông góc với a. Theo giả thiết F biến a thành chính nó, do đó F cũng biến b thành chính nó. Có thể xảy ra hai trường hợp :

– Mỗi điểm của b biến thành chính nó. Khi đó rõ ràng F là phép đối xứng qua đường thẳng b.



Hình 39

– Mỗi điểm của b biến thành điểm đối xứng qua I. Khi đó, tương tự như bài tập 14, ta có thể chứng minh rằng F là phép đối xứng qua tâm I.

65. Vì F không phải là phép đồng nhất nên có điểm A không trùng với ảnh A'. Nếu A' đối xứng với A qua I thì theo bài tập 64, F chính là phép đối xứng trục qua đường thẳng d đi qua I và vuông góc với AA', hoặc là phép đối xứng qua tâm I (tức là phép quay tâm I với góc quay 180^o).

Bây giờ xét trường hợp A' không đối xứng với A qua I, tức là ta có tam giác IAA'. Gọi A'' là ảnh của A' qua phép F. Khi đó, F biến tam giác IAA' thành tam giác $IA'A''$.

Có thể xảy ra hai trường hợp :

– A'' trùng với A. Khi đó, nếu gọi J là trung điểm của AA' thì J cũng là trung điểm của $A'A''$ nên F biến J thành J. Suy ra F biến mọi điểm của đường thẳng IJ thành chính nó. Vậy F là phép đối xứng qua đường thẳng IJ.

– A'' không trùng với A. Khi đó ta có $IA = IA' = IA''$ và $(IA, IA') = (IA', IA'')$ nên nếu gọi Q là phép quay tâm I góc quay $\varphi = (IA, IA')$ thì Q biến tam giác IAA' thành tam giác $IA'A''$ nên Q chính là F.

66. Vì F biến (O) thành chính nó nên F biến điểm O thành chính nó. Vậy theo bài tập 64, F là phép quay tâm O hoặc là phép đối xứng qua đường thẳng d chứa điểm O.

Trường hợp F là phép quay tâm O

Nếu góc quay là 180° (khi đó F là phép đối xứng qua điểm O) thì hiển nhiên trung điểm của MM' là O. Khi đó quỹ tích của trung điểm MM' là điểm O.

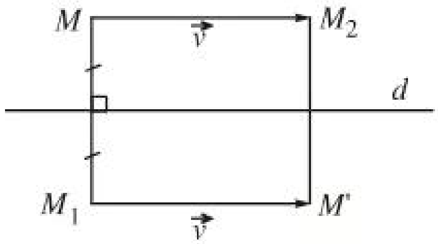
Nếu góc quay khác 180° thì rõ ràng độ dài dây cung MM' không đổi, do đó quỹ tích của trung điểm MM' là đường tròn tâm O.

Trường hợp F là phép đối xứng qua đường thẳng d (đi qua O)

Hiển nhiên trung điểm của MM' nằm trên d và do đó quỹ tích trung điểm đó là một đường kính của đường tròn.

67. a) (h.40)

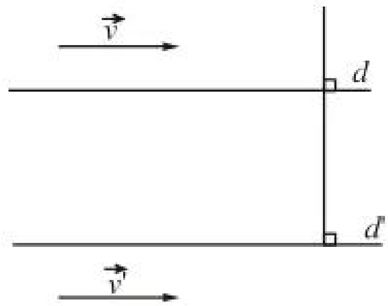
Giả sử M là một điểm nào đó, $Đ$ biến M thành M_1 và T biến M_1 thành M'. Như vậy, nếu gọi F là hợp thành của T và $Đ$ thì F biến M thành M'. Nếu ta lấy điểm M_2 sao cho $MM_1M'M_2$ là hình chữ nhật thì rõ ràng T biến M thành M_2 và $Đ$ biến M_2 thành M'. Vậy F cũng là hợp thành của T và $Đ$.



Hình 40

b) Hiển nhiên.

c) (h.41)



Hình 41

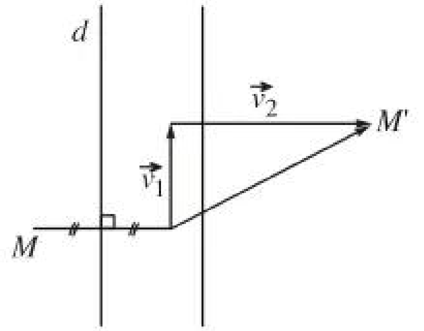
Giả sử phép đối xứng trượt F có trục d và vectơ trượt $\vec{v}$, phép đối xứng trượt F' có trục đối xứng d' và vectơ trượt $\vec{v}$. Kí hiệu $Đ$, $Đ'$ lần lượt là phép đối xứng có trục d và d', T

và T' lần lượt là các phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ và $\vec{v}'$. Như vậy F là hợp thành của T và $Đ$, F' là hợp thành của $Đ'$ và T'. Suy ra hợp thành của F và F' là hợp thành của bốn phép : T, $Đ$, $Đ'$ và T'.

Vì $d \,//\, d'$ nên hợp thành của $Đ$ và $Đ'$ là một phép tịnh tiến. Vậy hợp thành F và F' là hợp thành của ba phép tịnh tiến và do đó là một phép tịnh tiến.

d) (h.42)

Gọi $Đ$ là phép đối xứng trục, với trục là đường thẳng d, T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, còn F là hợp thành của $Đ$ và T. Ta có thể tìm được hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ sao cho $\vec{v}_1$ song song với d, $\vec{v}_2$ vuông góc với d và $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Nếu ta gọi T_1 và T_2 lần lượt là các phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ thì T là hợp thành của T_2 và T_1. Nhưng vì $\vec{v}_2$ vuông góc với d nên T_2 có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_1$ và $Đ_2$ có trục song song với d. Tóm lại, F là hợp thành của bốn phép $Đ$, $Đ_1$, $Đ_2$ và T_1. Như đã biết, hợp thành của ba phép đối xứng trục $Đ$, $Đ_1$, $Đ_2$ (có trục song song) là phép đối xứng trục $Đ_3$ có trục song song với d. Vậy F là hợp thành của $Đ_3$ và T_1 với vectơ tịnh tiến của T_1 song song với trục đối xứng của $Đ_3$, nên F là phép đối xứng trượt.

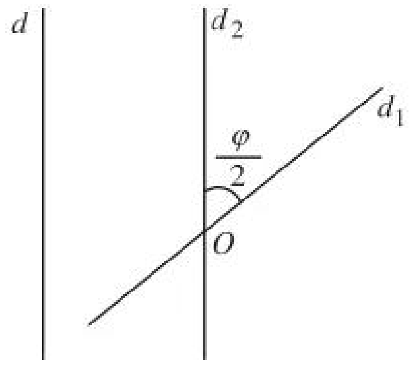


Hình 42

e) (h.43)

Giả sử Q là phép quay tâm O và $Đ$ là phép đối xứng qua đường thẳng d, F là hợp thành của Q và $Đ$. Ta có thể xem phép quay Q là hợp thành của hai phép đối xứng $Đ_1$ và $Đ_2$ có các trục đối xứng đi qua O, trong đó trục của $Đ_2$ song song với d. Như vậy F là hợp thành của ba phép đối xứng :

$Đ_1$, $Đ_2$ và $Đ$.



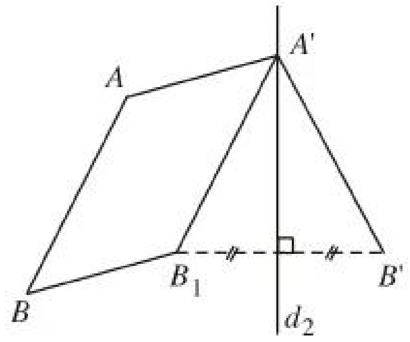
Hình 43

Nhưng hợp thành của $Đ_2$ và $Đ$ (có trục đối xứng song song) là phép tịnh tiến và do đó F là hợp thành của một phép đối xứng và một phép tịnh tiến nên theo câu d), F là phép đối xứng trượt.

g) Suy ra từ câu d) và câu e).

68. (h.44)

Gọi T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$. Khi đó T biến A thành A' và biến B thành B_1. Gọi d_2 là đường trung trực của đoạn thẳng B_1B' nếu B_1 khác B', còn nếu B_1 trùng B' thì lấy d_2 là đường thẳng $A'B'$. Hiển nhiên khi đó d_2 đi qua A' và phép đối xứng $Đ_2$ qua đường thẳng d_2 biến A' thành A' và biến B_1 thành B'. Vậy hợp thành F của T và $Đ_2$ sẽ biến A thành A' và biến B thành B'. Suy ra F là phép đối xứng trượt.



Hình 44

69. Lấy hai điểm A, B phân biệt nằm trên a và gọi $A' = F(A)$, $B' = F(B)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AA' và BB'.

Trường hợp hai điểm I và J trùng nhau

Khi đó, phép đối xứng qua I biến điểm $M \in a$ thành điểm $M_1 \in a'$ sao cho

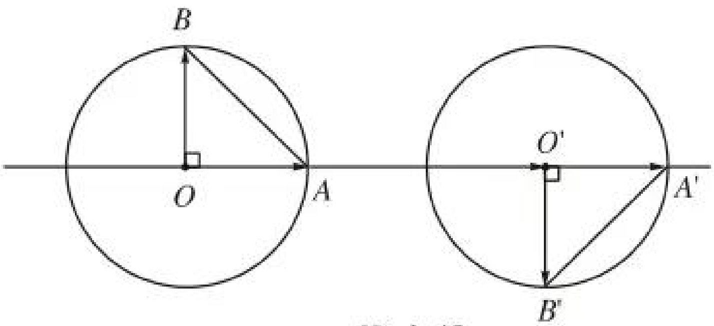
$$M_1A' = MA, M_1B' = MB.$$

Suy ra M_1 trùng $M' = F(M)$. Vậy trung điểm MM' cũng là điểm I.

Trường hợp hai điểm I, J phân biệt

Ta gọi F' là phép đối xứng trượt biến A thành A' và biến B thành B'. Trục của phép đối xứng trượt chính là đường thẳng d đi qua I và J. Khi đó, với mọi điểm $M \in a$ ta có $M' = F'(M) = F(M)$. Vậy trung điểm các đoạn thẳng MM' cũng nằm trên d.

70. (h.45)



Hình 45

a) Vì hai tam giác OAB và $O'A'B'$ bằng nhau nên có phép dời hình F biến O thành O', biến A thành A' và biến B thành B'. Hiển nhiên F cũng biến (O) thành (O').

b) Gọi f là phép đối xứng trượt có trục là OO' và vectơ trượt là $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$ thì rõ ràng f biến O, A, B lần lượt thành O', A', B'. Vậy f trùng với F. Từ đó, suy ra trung điểm của MM' luôn luôn nằm trên đường thẳng OO'.

71. a) Với điểm M bất kì, nếu V biến M thành M' và T biến M' thành M'' thì F biến M thành M''. Bởi vậy F biến điểm I thành điểm I nếu V biến I thành I' và T biến I' thành I, khi đó $\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{I'I} = \vec{v}$.

Từ đó, suy ra $\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OI'} = \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} - k\overrightarrow{OI} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \dfrac{\vec{v}}{1-k}$.

Vậy điểm I hoàn toàn xác định.

b) Với điểm M bất kì, nếu V biến M thành M' thì $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, nếu T biến M' thành M'' thì $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$. Từ đó, suy ra $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM'} - \overrightarrow{IO} = k(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IO})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{OI}(1-k) = k\overrightarrow{IM}. \qquad (*)$$

Nhưng từ biểu thức xác định I ta có $\overrightarrow{OI}(1-k) = \vec{v}$.

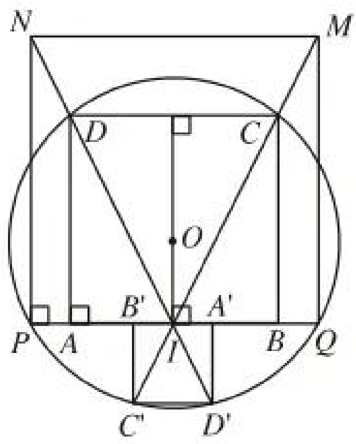
Ngoài ra, vì $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$ nên $\overrightarrow{IM''} - \overrightarrow{IM'} = \vec{v}$ hay $\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IM''} - \vec{v}$.

Vậy đẳng thức (*) trở thành $\overrightarrow{IM''} = k\overrightarrow{IM}$.

Do đó, phép F biến M thành M'' chính là phép vị tự tâm I tỉ số k.

72. (h.46)

Giả sử đã dựng được hình vuông $ABCD$ thoả mãn điều kiện của bài toán. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng PQ thì OI là đường trung trực của PQ nên cũng là đường trung trực của DC và do đó cũng là đường trung trực của AB. Từ đó suy ra, nếu dựng hình vuông $PQMN$ thì có phép vị tự tâm I biến hình vuông $PQMN$ thành hình vuông $ABCD$.



Hình 46

Cách dựng

Dựng hình vuông $PQMN$. Lấy giao điểm C và C' của đường thẳng IM và đường tròn, lấy giao điểm D và D' của IN và đường tròn (ta kí hiệu sao cho hai điểm C, D nằm về một phía đối với đường thẳng PQ). Gọi các điểm B, A, B', A' lần lượt là hình chiếu của các điểm C, D, C', D' trên đường thẳng PQ. Ta được các hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$ thoả mãn điều kiện của bài toán.

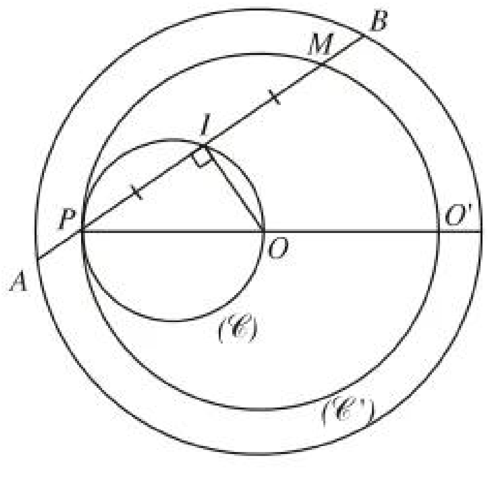
73. Gọi I là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{PI} = \dfrac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}$,

bởi vậy $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PI}$.

Gọi V là phép vị tự tâm P tỉ số $k = 2$ thì V biến điểm I thành điểm M.

Vì I là trung điểm của AB nên $OI \perp AB$. Suy ra quỹ tích của điểm I là đường tròn $(\mathscr{C})$ đường kính PO.

Vậy quỹ tích của điểm M là đường tròn $(\mathscr{C}')$ ảnh của $(\mathscr{C})$ qua phép vị tự V. Nếu ta lấy O' sao cho $\overrightarrow{PO'} = 2\overrightarrow{PO}$ thì $(\mathscr{C}')$ là đường tròn đường kính PO'.



Hình 47

74. (h.48)

Trên đoạn thẳng AC lấy điểm M sao cho

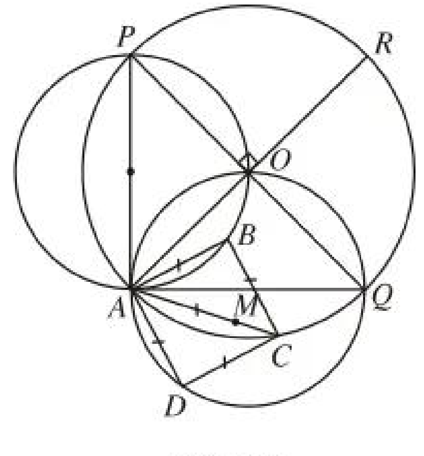
$$AM = AB = AD.$$

Khi đó, ta có $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ngoài ra $(AM, AB) = 45^{\circ}$ và

$$(AM, AD) = -45^{\circ}.$$

Suy ra, phép vị tự V tâm A tỉ số $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ biến điểm C thành điểm M và phép quay Q tâm A góc quay 45° biến điểm M thành điểm B. Vậy nếu gọi F là phép hợp thành của V và Q thì F biến C thành B. Vì quỹ tích của C là đường tròn (O), nên quỹ tích của B là ảnh của đường tròn đó qua phép đồng dạng F.



Hình 48

Đường tròn quỹ tích của B có thể xác định như sau :

Gọi AR là đường kính của (O) và PQ là đường kính của (O) vuông góc với AR (ta kí hiệu các điểm P, Q sao cho $(AR, AP) = 45^{\circ}$). Khi đó dễ thấy rằng phép đồng dạng F biến AR thành AP. Vậy quỹ tích B là đường tròn đường kính AP.

Tương tự, ta được quỹ tích D là đường tròn đường kính AQ.