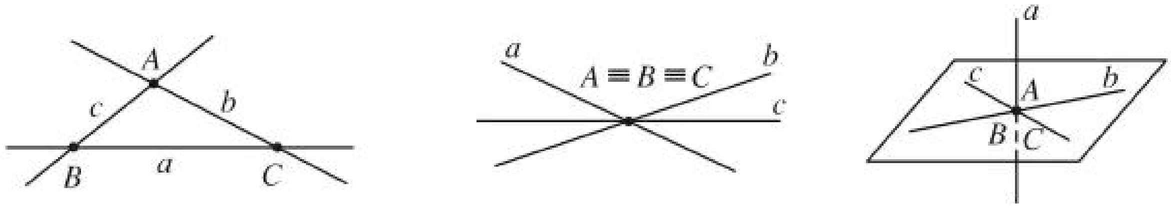
Bài tập ôn tập chương II

68. (h.120)

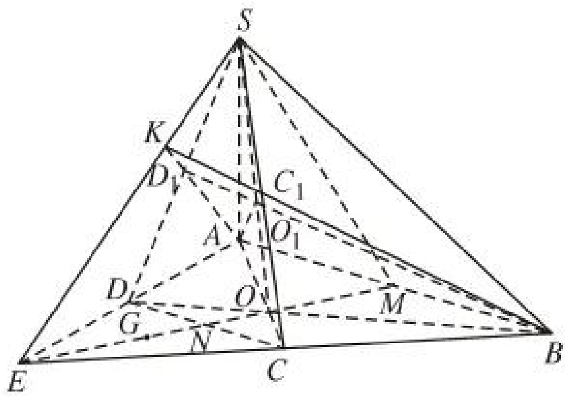


Hình 120

Ta nhận thấy rằng : Nếu ba đường thẳng bất kì trong n đường thẳng ($n \geq 3$) đã cho đồng quy thì n đường thẳng đó đồng quy. Còn nếu tồn tại ba đường thẳng không đồng quy mà từng đôi một cắt nhau tại ba điểm A, B, C thì rõ ràng A, B, C không thẳng hàng. Khi đó các đường thẳng còn lại đều cắt ba đường thẳng nói trên nên chúng đều thuộc mp(ABC) (trái với giả thiết). Vậy ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $n = 3$.

Giả sử ba đường thẳng đã cho là a, b và c ; A, B, C lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng b và c, c và a, a và b. Nếu các điểm A, B, C phân biệt từng cặp thì dễ thấy a, b, c đều thuộc mp(ABC) (trái với giả thiết). Vậy các điểm A, B, C phải trùng nhau. Do đó ba đường thẳng a, b, c đồng quy.

69. (h.121)



Hình 121

a) Gọi N là giao điểm của EM và CD. Do M là trung điểm của AB và $AB \parallel CD$ nên N cũng là trung điểm của CD ; suy ra G thuộc EM, hay $G \in$ mp(SEM), tức là các điểm S, E, M, G thuộc mp(SEM).

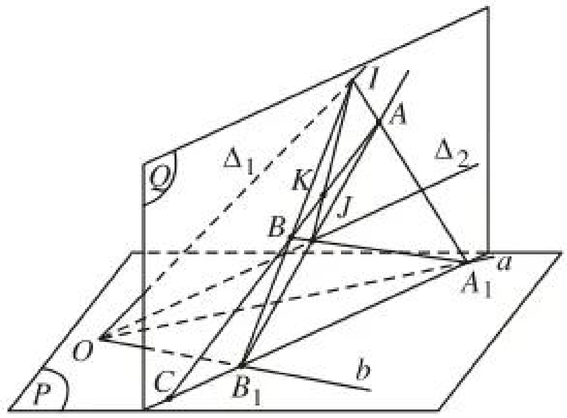
Gọi O là giao điểm của AC và BD thì đường thẳng MN đi qua O. Vậy ba mặt phẳng (SEM), (SAC) và (SBD) đều có chung hai điểm S và O nên SO chính là giao tuyến chung Δ của ba mặt phẳng trên.

b) Vì K thuộc AD_1 và BC_1 nên tương ứng K thuộc mp(SAD) và mp(SBC). Do đó K nằm trên giao tuyến SE của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Vậy ba điểm S, E, K thẳng hàng.

Điểm O_1 nằm trên AC_1 và BD_1 nên O_1 phải thuộc (SAC) và (SBD) (do $AC_1 \subset (SAC)$, $BD_1 \subset (SBD)$). Từ đó, suy ra O_1 phải thuộc giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

70. (h.122)

a) Mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (P) có ba điểm chung là A_1, B_1 và C nên ba điểm đó phải thẳng hàng ; tức là đường thẳng A_1B_1 luôn đi qua điểm cố định C.



Hình 122

b) Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} I \in AA_1 \\ AA_1 \subset \text{mp}(A, a) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in \text{mp}(A, a) \text{ ;}$$

$$\left.\begin{array}{l} I \in BB_1 \\ BB_1 \subset \text{mp}(B, b) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in \text{mp}(B, b).$$

Từ đó, suy ra I thuộc giao tuyến Δ_1 của hai mặt phẳng (B, b) và (A, a). Do hai mặt phẳng này cố định nên đường thẳng Δ_1 cố định.

Chứng minh tương tự, điểm J chạy trên đường thẳng cố định Δ_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng cố định mp(A, b) và mp(B, a). (Chú ý Δ_1, Δ_2 đều đi qua O).

c) Hai đường thẳng IJ, AB đều thuộc mp(Q) và chúng không thể song song nên chúng cắt nhau tại một điểm K.

Ta có $$\left.\begin{array}{l} K \in IJ \\ IJ \subset \text{mp}(\Delta_1, \Delta_2) \end{array}\right\} \Rightarrow K \in \text{mp}(\Delta_1, \Delta_2).$$

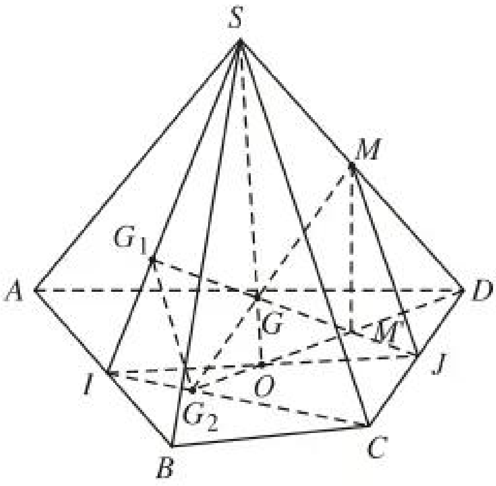
Mặt khác K thuộc AB. Do đó K chính là giao điểm của đường thẳng cố định AB với mp(Δ_1, Δ_2) cố định nên K cố định. Vậy đường thẳng IJ luôn đi qua điểm K cố định.

71. (h.123)

a) Ta có

$$\frac{IG_1}{IS} = \frac{IG_2}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, SC.$$

Mặt khác MJ là đường trung bình của tam giác DSC nên $MJ \,//\, SC$. Từ đó, suy ra $G_1G_2 \,//\, MJ$.



Hình 123

b) Rõ ràng tám đường thẳng đã cho không đồng phẳng ; ta chỉ cần chứng minh chúng cắt nhau từng đôi.

Lấy hai đường thẳng bất kì trong tám đường thẳng trên (chẳng hạn như hai đường thẳng MG_2 và JG_1). Theo câu a) thì $G_1G_2 \,//\, MJ$, do đó MG_2 và JG_1 nằm trong mp(G_1G_2JM). Vậy MG_2 và JG_1 cắt nhau.

Vậy theo bài 68 (chương II), ta có tám đường thẳng đã cho không đồng phẳng và từng đôi cắt nhau nên chúng đồng quy tại một điểm G.

c) Xét mp($ABCD$). Dễ thấy

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \ \overrightarrow{OD} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -3\overrightarrow{OG_2}$ (vì G_2 là trọng tâm tam giác ABC)

$\Rightarrow \ O, G_2, D$ thẳng hàng và $OD = 3OG_2$.

Xét ba mặt phẳng (G_1G_2JM), (G_2MD), (SIJ). Ta có

$$(G_1G_2JM) \cap (G_2MD) = G_2M$$
$$(G_1G_2JM) \cap (SIJ) = G_1J$$
$$(G_2MD) \cap (SIJ) = SO.$$

Vậy G_2M, G_1J và SO đồng quy. Theo kết quả câu b) thì G_2M và G_1J cắt nhau tại G. Vậy điểm G nằm trên SO.

Kẻ MM' song song với SO và cắt G_2D tại M', ta có

$$OM' = M'D = \frac{1}{2}OD = \frac{3}{2}OG_2 \text{ và } \frac{OG}{MM'} = \frac{OG_2}{G_2M'} = \frac{OG_2}{\frac{5}{2}OG_2} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \quad OG = \frac{2}{5}MM' = \frac{1}{5}SO$$

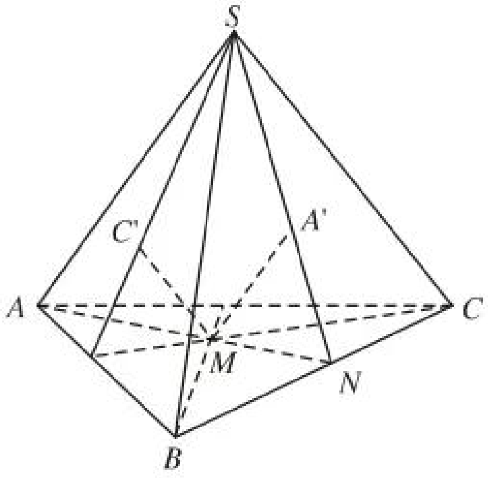
$$\Rightarrow \quad GS = 4GO.$$

72. (h.124)

a) Vì $A'M \,//\, SA$ nên có mp(MA', SA). Mặt phẳng này và mặt phẳng (ABC) có ba điểm chung A, M, N. Do đó ba điểm A, M, N phải nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng nói trên. Vậy ba điểm đó phải thẳng hàng.

Kéo dài AM cắt BC tại N. Trong mp(SAN) kẻ MA' song song với SA cắt SN tại A'. Điểm A' là điểm cần tìm.

Tương tự xác định được các điểm B', C'.



Hình 124

b) Dễ thấy $\dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{MN}{AN}$

mà $\dfrac{MN}{AN} = \dfrac{MA'}{SA}$.

Vậy $\dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{MA'}{SA}$.

c) Chứng minh tương tự như câu b), ta có

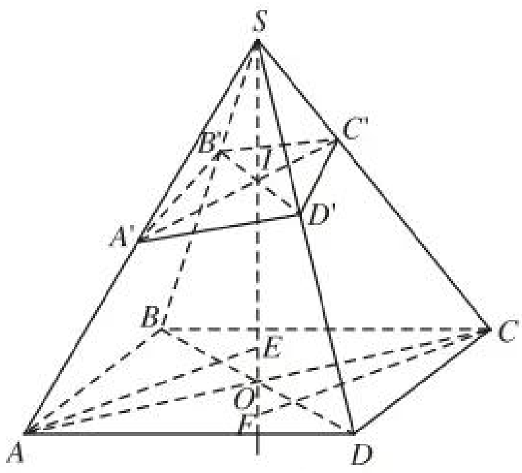
$$\frac{S_{MCA}}{S_{ABC}} = \frac{MB'}{SB}, \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}} = \frac{MC'}{SC}.$$

Vậy $\dfrac{MA'}{SA} + \dfrac{MB'}{SB} + \dfrac{MC'}{SC} = \dfrac{S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MAB}}{S_{ABC}}$

$$= \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1.$$

73. a) (h.125)

Trong mp(SAC) nối A' với C' cắt SO tại I. Trong mp(SBD) nối B' với I cắt SD tại D'. Khi đó D' chính là giao điểm của mp(P) với SD.



Hình 125

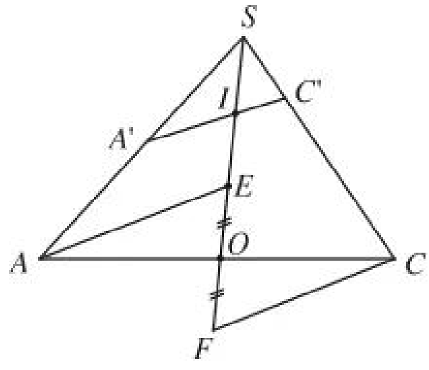
b) (h.126)

Trong mp(SAC), kẻ AE // $A'C'$ cắt SO tại E ;
kẻ CF // $A'C'$ cắt SO tại F. Ta có :

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SE}{SI} = \frac{SO - OE}{SI} \qquad (1)$$

$$\frac{SC}{SC'} = \frac{SF}{SI} = \frac{SO + OF}{SI}. \qquad (2)$$

Do O là trung điểm của AC và AE // CF, nên $OE = OF$.



Hình 126

Vậy từ (1) và (2), suy ra $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{2SO}{SI}$. (3)

c) Chứng minh tương tự như câu b), ta có

$$\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{2SO}{SI}. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}.$$

74. (h.127)

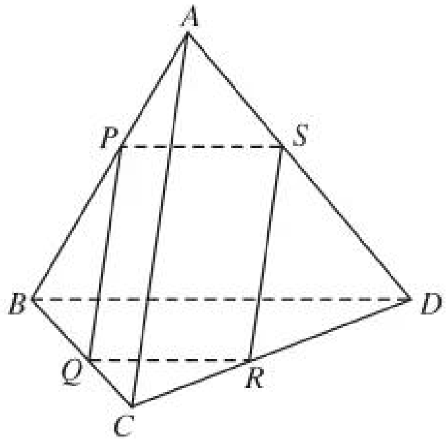
a) $$\left.\begin{array}{l} AC \,//\, (\alpha) \\ AC \subset (ABC) \\ (\alpha) \cap (ABC) = PQ \end{array}\right\} \Rightarrow PQ \,//\, AC.$$

$$\left.\begin{array}{l} AC \,//\, (\alpha) \\ AC \subset (ACD) \\ (\alpha) \cap (ACD) = RS \end{array}\right\} \Rightarrow RS \,//\, AC.$$

Từ trên, suy ra PQ // RS (// AC). (1)

Chứng minh tương tự, ta có

PS // QR (// BD). (2)



Hình 127

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $PQRS$ là hình bình hành.

b) Vì $PS \,//\, BD \Rightarrow \dfrac{PS}{BD} = \dfrac{PA}{AB}$

nên $$PS = \frac{BD}{AB} \cdot PA. \quad (3)$$

Vì $PQ \,//\, AC \Rightarrow \dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{PB}{AB}$

nên $$PQ = \frac{AC}{AB} \cdot PB. \quad (4)$$

Tứ giác $PQRS$ là hình thoi khi và chỉ khi $PS = PQ$

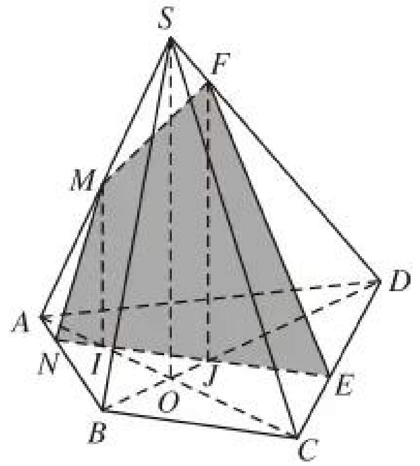
$$\Leftrightarrow \quad BD.PA = AC.PB$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{PA}{PB} = \frac{AC}{BD}. \quad (5)$$

Vậy tứ giác $PQRS$ là hình thoi khi và chỉ khi mp(α) qua điểm P (được xác định bởi (5)) đồng thời song song với cả AC và BD.

75. a) (h.128)

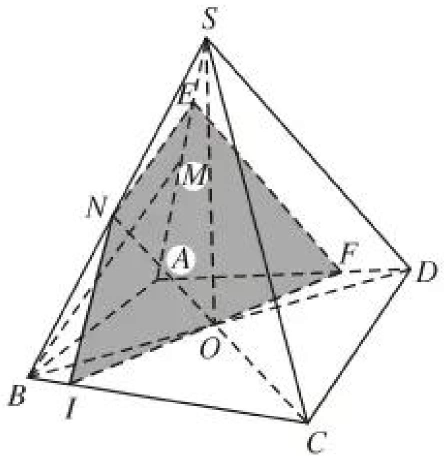
Qua M ta kẻ đường thẳng MI song song với SO cắt AC tại I. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, CD, DB lần lượt tại N, E, J. Qua J kẻ đường thẳng song song với SO cắt SD tại F. Tứ giác $MNEF$ là thiết diện cần tìm.



Hình 128

b) (h.129)

Trong mp(SBD), qua O kẻ đường thẳng song song với SD cắt cạnh SB tại N. Qua N kẻ đường thẳng song song với BM cắt SA tại E. Qua E kẻ đường thẳng song song với SD cắt AD tại F. Nối F với O cắt BC tại I. Tứ giác $NEFI$ là thiết diện cần tìm.



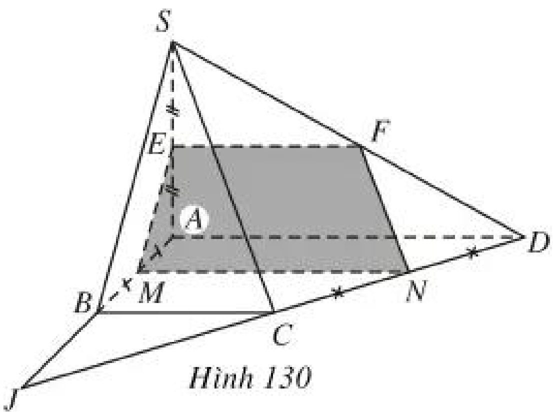
Hình 129

76. (h.130)

a) MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$, suy ra

$$\left.\begin{array}{l} MN \,//\, BC \\ BC \subset (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow MN \,//\, (SBC).$$

$$\left.\begin{array}{l} MN \,//\, (SBC) \\ ME \,//\, (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow (MEN) \,//\, (SBC).$$



Hình 130

b) Ta có

$EF \,//\, AD \Rightarrow EF \,//\, MN$

$\Rightarrow EF \subset (MNE) \Rightarrow F \in (MNE)$.

Mặt khác $F \in SD$, do đó $F = (MNE) \cap SD$.

Thiết diện là hình thang $MNFE$.

c) Theo câu a), ta có $(SBC) \,//\, (MNE)$

mặt khác $SC \subset (SBC)$.

Suy ra $SC \,//\, (MNE)$.

Đường thẳng AF không song song với mp(SBC) vì nếu $AF \,//\, (SBC)$ thì $AF \subset (MNE) \Rightarrow A \in (MNE)$ (vô lí).

d) Xét ba mặt phẳng (SAB), (SCD) và (MNE). Ta có :

$(SAB) \cap (SCD) = SJ$ (J là giao điểm của AB và CD)

$(SAB) \cap (MNE) = ME$

$(SCD) \cap (MNE) = NF$.

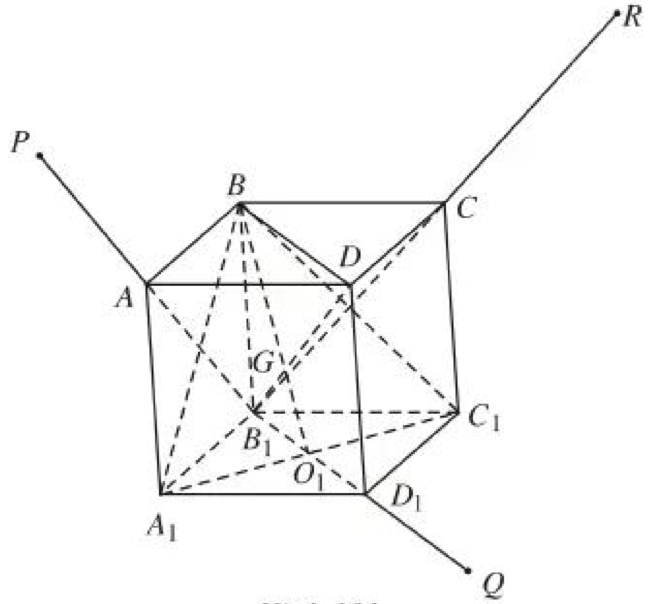
Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì ba đường thẳng SJ, ME, NF đồng quy. Vậy điểm I phải di động trên đường thẳng SJ (trừ những điểm trong của đoạn SJ).

77. (h.131)

a) Gọi O_1 là giao điểm của A_1C_1 và B_1D_1. Khi đó

$(A_1BC_1) \cap (BDD_1B_1) = BO_1$.

Gọi G là giao điểm của B_1D và BO_1 thì G chính là giao điểm của B_1D với mp(A_1BC_1). Dễ thấy $\Delta GBD \backsim \Delta GO_1B_1$, tỉ số đồng dạng là 2 (do $\dfrac{BD}{B_1O_1} = 2$).



Hình 131

Vậy $B_1G = \dfrac{1}{2}GD$

và $GO_1 = \dfrac{1}{2}GB$, suy ra G là trọng tâm tam giác A_1BC_1.

b) Dễ thấy $AC \,//\, A_1C_1$, $D_1A \,//\, C_1B \Rightarrow (D_1AC) \,//\, (BA_1C_1)$.

Chứng minh tương tự như câu a), ta có trọng tâm G' của tam giác D_1AC nằm trên đường chéo DB_1 và $DG' = \dfrac{1}{2}G'B_1$. Từ đó và kết quả của câu a), suy ra G và G' chia đường chéo B_1D thành ba phần bằng nhau.

Vậy $\qquad B_1G' = \dfrac{2}{3}B_1D.$

c) Do A, D_1, C lần lượt là trung điểm của PB_1, QB_1, RB_1 nên

$$PQ \,//\, AD_1,\ QR \,//\, D_1C,\ RP \,//\, CA.$$

Từ đó, suy ra $\quad (PQR) \,//\, (AD_1C)$.

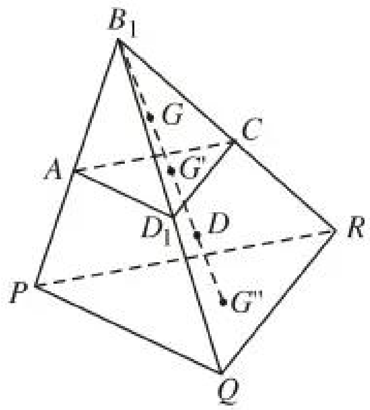
Mặt khác, theo câu b), ta có $(D_1AC) \,//\, (BA_1C_1)$, nên $(PQR) \,//\, (BA_1C_1)$.

d) (h.132)

Vì A, D_1, C lần lượt là trung điểm của B_1P, B_1Q, B_1R nên trọng tâm G'' của tam giác PQR phải nằm trên đường thẳng B_1G' và $B_1G'' = 2B_1G'$. Mặt khác $B_1G' = \frac{2}{3}B_1D$,

nên $B_1G'' = \frac{4}{3}B_1D \Rightarrow B_1D = \frac{3}{4}B_1G''$.

Vậy D là trọng tâm tứ diện B_1PQR.



Hình 132

Chú ý. Sau khi học vectơ trong không gian, ta có thể dùng phương pháp vectơ để giải bài toán này một cách ngắn gọn hơn bằng cách đặt $\overrightarrow{B_1A_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B_1B} = \vec{b}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{c}$ và chứng minh $\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DR} = \vec{0}$.