Bài tập ôn tập chương III

71. (h.207)

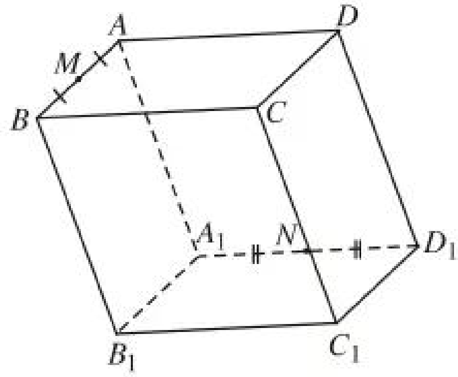
a) Đặt $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

P là giao điểm của mp(CMN) với đường thẳng B_1C_1 khi và chỉ khi C, M, N, P thuộc một mặt phẳng và P thuộc đường thẳng B_1C_1.

Ta có các điểm M, N, C, P thuộc một mặt phẳng nên tồn tại các số x, y, z sao cho

$$x + y + z = 1 \qquad (*)$$

và $$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AN} + z\overrightarrow{AC}.$$



Hình 207

Ta có $$\overrightarrow{AP} = x.\frac{\vec{b}}{2} + y\left(\vec{a} + \frac{\vec{c}}{2}\right) + z(\vec{b} + \vec{c})$$

$$= y\vec{a} + \left(\frac{x}{2} + z\right)\vec{b} + \left(\frac{y}{2} + z\right)\vec{c}. \qquad (1)$$

Vì P thuộc đường thẳng B_1C_1 nên $\overrightarrow{B_1P} = t\overrightarrow{B_1C_1}$,

từ đó $$\overrightarrow{AP} = \vec{b} + \vec{a} + t\vec{c}. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) và do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên

$$\begin{cases} y = 1 \\ \dfrac{x}{2} + z = 1 \\ \dfrac{y}{2} + z = t. \end{cases} \qquad (**)$$

Kết hợp (*) và (**), ta có

$$\begin{cases} y = 1 \\ \dfrac{x}{2} + z = 1 \\ \dfrac{y}{2} + z = t \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad z = -x \Rightarrow \frac{x}{2} - x = 1 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow \quad z = 2,\ t = \frac{5}{2}\cdot$$

Vậy giao điểm của mp(CMN) với đường thẳng B_1C_1 là điểm P xác định bởi

$$\overrightarrow{B_1P} = \frac{5}{2}\overrightarrow{B_1C_1}.$$

Tương tự như trên, nếu gọi Q là giao điểm của mp(CMN) với đường thẳng B_1D thì ta có $\quad x + y + z = 1$

và $$\overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AN} + z\overrightarrow{AC}$$

$$= y\vec{a} + \left(\frac{x}{2} + z\right)\vec{b} + \left(\frac{y}{2} + z\right)\vec{c}.$$

Mặt khác

$$\overrightarrow{AQ} = \vec{b} + \vec{a} + t\overrightarrow{B_1D} = \vec{a} + \vec{b} + t(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$$

$$= (1-t)\ \vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}.$$

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y = 1 - t \\ \dfrac{x}{2} + z = 1 - t \\ \dfrac{y}{2} + z = t \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} - y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - z = 2 - 4z \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2}{9},\ y = \frac{4}{9},\ t = \frac{5}{9}.$$

Vậy giao điểm Q của đường thẳng B_1D với mp(CMN) được xác định bởi

$$\overrightarrow{B_1Q} = \frac{5}{9}\overrightarrow{B_1D}.$$

b) Từ kết quả câu a), ta có

$$\overrightarrow{AP} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{5}{9}\vec{c}.$$

72. (h.208)

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

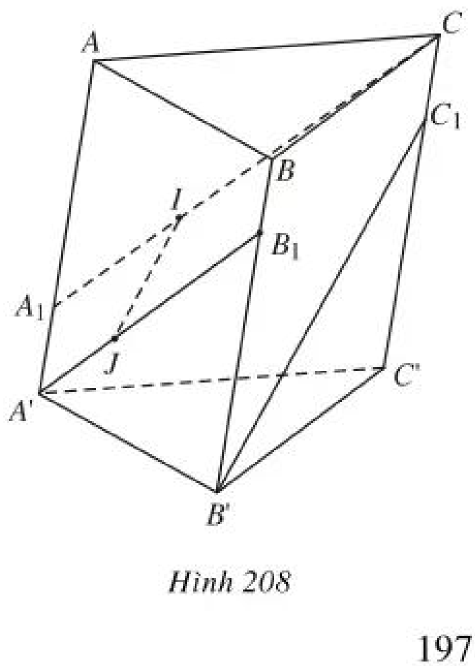
Theo giả thiết, ta có

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{3}{4}\vec{a},\ \overrightarrow{B'B_1} = -\frac{3}{4}\vec{a},\ \overrightarrow{C'C_1} = -\frac{3}{4}\vec{a}.$$

Ta có

$$\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1} = \frac{3}{4}\vec{a} - \vec{c}\ ;$$

$$\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B_1} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \vec{b}\ ;$$



Hình 208

$$\overrightarrow{B'C_1} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C_1}$$
$$= -\frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

Vì I thuộc CA_1 nên $\overrightarrow{CI} = t\overrightarrow{CA_1} = \frac{3}{4}t\vec{a} - t\vec{c}.$

Do J thuộc $A'B_1$ nên $\overrightarrow{A'J} = m\overrightarrow{A'B_1} = -\frac{3}{4}m\vec{a} + m\vec{b}.$

Mặt khác $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'J}$

$$= -\frac{3}{4}t\vec{a} + t\vec{c} + \vec{a} - \vec{c} - \frac{3}{4}m\vec{a} + m\vec{b}$$
$$= \left(1 - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}m\right)\vec{a} + m\vec{b} + (t-1)\vec{c}.$$

Ta có $IJ \parallel B'C_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{B'C_1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}m = -\frac{3}{4}k \\ m = -k \\ t - 1 = k. \end{cases}$$

Suy ra $1 - \frac{3}{4}(k+1) + \frac{3}{4}k = -\frac{3}{4}k$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4}k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow t = \frac{2}{3}, m = \frac{1}{3}.$$

Vậy điểm I thuộc A_1C được xác định bởi $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA_1}$

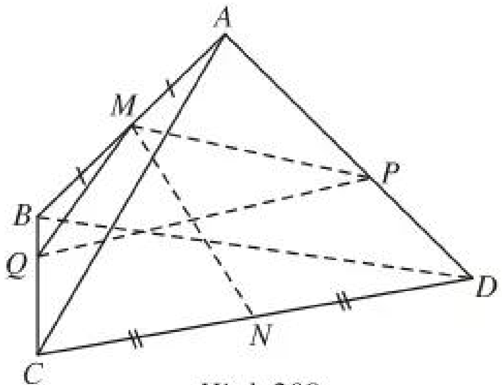
và J thuộc $A'B_1$ được xác định bởi $\overrightarrow{A'J} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B_1}$.

Khi đó, ta có $\frac{IJ}{B'C_1} = \frac{1}{3}$.

73. (h.209)

MN cắt PQ nên các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng. Điều này tương đương với có các số x, y sao cho

$$\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}.$$



Hình 209

Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a},\ \overrightarrow{DB} = \vec{b},\ \overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

Khi đó $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

$$= \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}}{1-k}$$

$$= \frac{1}{1-k}\left[\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{k}{2}(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{a})\right]$$

$$= \frac{1}{1-k}\left[\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{k}{2}(\vec{a} + \vec{b})\right]$$

$$= \frac{1}{2(1-k)}\left[(1+k)\vec{a} + (k-1)\vec{b}\right]$$

$$= \frac{k+1}{2(1-k)}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) + t(-\vec{b} + \vec{c})$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + t\vec{c}\,.$$

Từ đó ta có $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{k+1}{2(1-k)} = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y \\ -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}x + y\left(\dfrac{1}{2} - t\right) \\ 0 = \dfrac{1}{2}x + yt. \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -1,\ x = \frac{k+1}{k-1} + 1 = \frac{2k}{k-1}$$

$$t = \frac{k}{k-1}\,.$$

Như vậy $$\overrightarrow{BQ} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{BC} = \frac{k}{k-1}(\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QC})$$

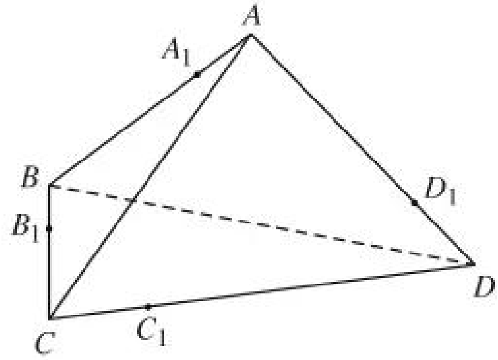
$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{k}{k-1}\right)\overrightarrow{BQ} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{QC}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\overrightarrow{BQ} = k.\overrightarrow{QC}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{QB}{QC} = |k|.$$

74. *Cách 1.* (h.210) Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi có các số *m*, *n* để

$$\overrightarrow{D_1B_1} = m\overrightarrow{D_1A_1} + n\overrightarrow{D_1C_1}. \qquad (1)$$



Hình 210

Từ hệ thức $\overrightarrow{B_1B} = k\overrightarrow{B_1C}$, ta có

$$\overrightarrow{D_1B_1} = \frac{\overrightarrow{D_1B} - k\overrightarrow{D_1C}}{1-k}$$

hay $$\overrightarrow{D_1B_1} = \frac{\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DB} - k(\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DC})}{1-k} = \overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{1-k}\vec{b} - \frac{k}{1-k}\vec{c}.$$

Mặt khác $$\overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{D_1A} = k(\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DA}) \Rightarrow \overrightarrow{D_1D} = \frac{k}{1-k}\vec{a}.$$

Vậy $$\overrightarrow{D_1B_1} = \frac{k}{1-k}\vec{a} + \frac{1}{1-k}\vec{b} - \frac{k}{1-k}\vec{c}. \qquad (2)$$

Tương tự như trên, ta có

$$\overrightarrow{D_1A_1} = \frac{\overrightarrow{D_1A} - k\overrightarrow{D_1B}}{1-k} = \frac{\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DA} - k(\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DB})}{1-k}$$

$$= \overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{1-k}\vec{a} - \frac{k}{1-k}\vec{b}$$

hay $$\overrightarrow{D_1A_1} = \frac{k+1}{1-k}\vec{a} - \frac{k}{1-k}\vec{b} \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{D_1C_1} = \frac{\overrightarrow{D_1C} - k\overrightarrow{D_1D}}{1-k} = \frac{\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DC} - k\overrightarrow{D_1D}}{1-k} = \overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{1-k}\vec{c}$$

do đó $\qquad \overrightarrow{D_1C_1} = \dfrac{k}{1-k}\vec{a} + \dfrac{1}{1-k}\vec{c}$. (4)

Từ (1), (2), (3), (4) ta có các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc mặt phẳng khi và chỉ khi

$$k\vec{a} + \vec{b} - k\vec{c} = (mk + nk + m)\vec{a} - mk\vec{b} + n\vec{c}.$$

Do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi có các số m, n để

$$\begin{cases} k = mk + nk + m \\ 1 = -mk \\ -k = n. \end{cases}$$

Điều đó tương đương với $k = -1 - k^2 - \dfrac{1}{k}$ hay $k^3 + k^2 + k + 1 = 0$ hay $k = -1$.

Vậy với $k = -1$ thì các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt phẳng.

Cách 2. Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Tìm k để các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt phẳng tương đương với việc tìm k để có biểu diễn

$\overrightarrow{DA_1} = x\overrightarrow{DB_1} + y\overrightarrow{DC_1} + z\overrightarrow{DD_1}$, với $x + y + z = 1$. (a)

Từ hệ thức $\overrightarrow{A_1A} = k\overrightarrow{A_1B}$ ta có

$$\overrightarrow{DA_1} = \frac{\overrightarrow{DA} - k\overrightarrow{DB}}{1-k} = \frac{1}{1-k}\vec{a} - \frac{k}{1-k}\vec{b}. \qquad (1)$$

Tương tự như trên, ta cũng có

$$\overrightarrow{DB_1} = \frac{1}{1-k}\vec{b} - \frac{k}{1-k}\vec{c}. \qquad (2)$$

Mặt khác từ $\overrightarrow{C_1C} = k\overrightarrow{C_1D}$ ta có

$$\overrightarrow{C_1D} + \overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{C_1D} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC_1} = \frac{1}{1-k}\vec{c}. \qquad (3)$$

Tương tự từ $\overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{D_1A}$, ta cũng có

$$\overrightarrow{D_1D} = \frac{k}{1-k}\vec{a}. \qquad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4), ta suy ra

$$\overrightarrow{DA_1} = -\frac{1}{k}\overrightarrow{DD_1} - k\overrightarrow{DB_1} - k^2\overrightarrow{DC_1}. \qquad \text{(b)}$$

Từ (a) và (b) ta có các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi

$$-\frac{1}{k} - k - k^2 = 1 \Leftrightarrow k^3 + k^2 + k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

Vậy với $k = -1$ thì các điểm $A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1$ cùng thuộc một mặt phẳng.

75. a) *Cách 1*. Gọi O là giao điểm của AC và BD

$$MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + \frac{BD^2}{2}.$$

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = BD$. Vậy $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

Cách 2. $MA^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2$

$$= 2\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2$$

$$= 2(MO^2 + OA^2)(\text{do } OA = OC, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}).$$

Tương tự như trên, ta có $MB^2 + MD^2 = 2(MO^2 + OB^2)$.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $OA = OB$.

Vậy $$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

b) Gọi I, J lần lượt trung điểm của AC và BD, khi đó :

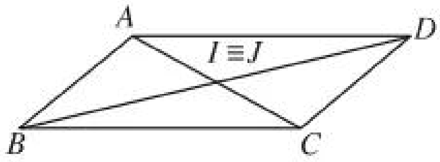
$$MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 - (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB})^2 - (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD})^2$$

$$= 2MI^2 + IA^2 + IC^2 - 2MJ^2 - JB^2 - JD^2$$

$$= 2(MI^2 - MJ^2) + \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2).$$

• Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $I \equiv J$. Khi đó

$$MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2 = \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2)$$



Hình 211

tức là $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

• Ngược lại, nếu $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M thì $MI^2 - MJ^2$ cũng là hằng số. Khi đó chọn M lần lượt là điểm I và điểm J thì $II^2 - IJ^2 = JI^2 - JJ^2$, suy ra $-IJ^2 = IJ^2$, tức là $IJ = 0$ hay $I \equiv J$.

Vậy $ABCD$ là hình bình hành (h.211).

Chú ý. Cũng có thể sử dụng các công thức

$$MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$MB^2 + MD^2 = 2MJ^2 + \frac{BD^2}{2}$$

và từ đó ta có $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2 = 2(MI^2 - MJ^2) + \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2)$ rồi lí luận như trên để đi đến kết quả.

76. (h.212)

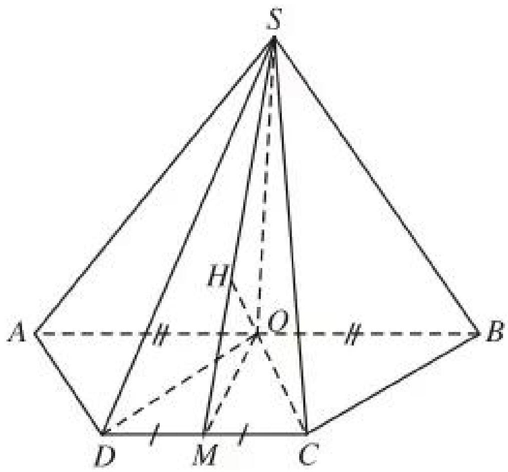
a) AO và DC song song và bằng nhau nên $AD = OC$ mà $AD = AO$, từ đó $OA = OC$.

Tương tự, ta có $OB = OD$.

Do đó $OA = OB = OC = OD$.

Mặt khác SO vuông góc với mp($ABCD$) nên mọi điểm trên SO cách đều các điểm A, B, C, D. Vì SA và SO cắt nhau nên xét đường trung trực của SA trong mp(SAB) thì nó cắt đường thẳng SO tại một điểm, đó là điểm cách đều năm đỉnh S, A, B, C, D. Vì $SO = a$, $AO = a$ nên $OS = OA$.

Vậy O là điểm cách đều các điểm S, A, B, C, D. Do đó, khoảng cách từ điểm cách đều phải tìm đến các đỉnh bằng a.



Hình 212

b) Gọi M là trung điểm của CD thì $OM \perp DC$

từ đó $\quad CD \perp$ mp(OMS).

Vậy nếu kẻ OH vuông góc với SM thì $DC \perp OH$,

từ đó $\quad OH \perp$ mp(SCD).

Như thế $\widehat{HSO}$ là góc giữa SO và mp(SCD).

Nhận thấy $\widehat{HSO} = \widehat{MSO}$.

Cách 1. Xét tam giác SOM vuông tại O ta có

$$\tan\widehat{HSO} = \tan\widehat{MOS} = \frac{OM}{OS} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cách 2.

Ta có
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OM^2}$$
$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2}.$$

Vậy
$$OH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

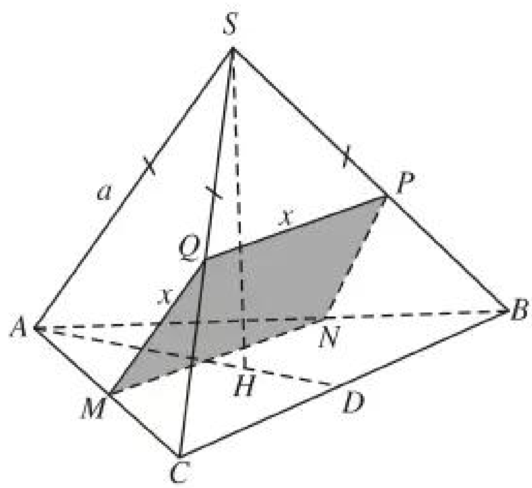
Do đó
$$\sin\widehat{HSO} = \frac{OH}{SO} = \frac{\frac{a\sqrt{21}}{7}}{a} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy góc giữa SO và mặt phẳng (SCD) là α mà

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7} \ (0^\circ < \alpha < 90^\circ).$$

77. (h.213)

Giả sử H là tâm của tam giác đều. Từ $SA = SB = SC$ nên $SH \perp (ABC)$ và $\widehat{SAH} = 60^\circ$.



Hình 213

Giả sử mặt phẳng song song với SA, CD và thiết diện thu được là hình vuông $MNPQ$.

Khi đó, nếu kí hiệu cạnh hình vuông là x thì

$$\frac{x}{SA} = \frac{CQ}{CS} \quad (1)$$

$$\frac{x}{BC} = \frac{SQ}{SC}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$$x\left(\frac{1}{SA}+\frac{1}{BC}\right)=\frac{CQ+QS}{CS}=1$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{SA.BC}{SA+BC}=\frac{a.BC}{a+BC}.$$

Mặt khác $\quad HA = SA\cos 60^{\circ}=\frac{a}{2}$

mà $\quad HA=\frac{BC\sqrt{3}}{3}.$

Suy ra $\quad BC=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$

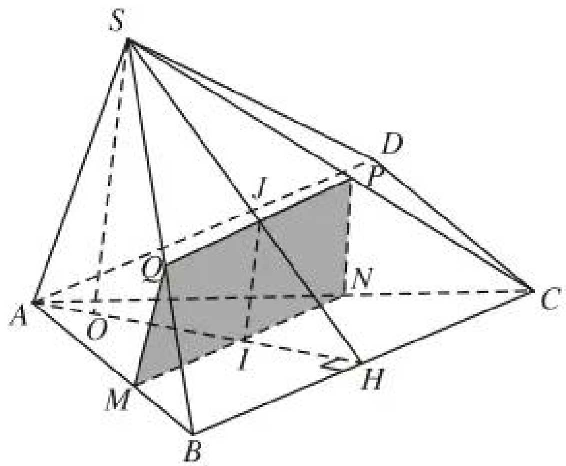
Từ đó $\quad x=\dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{a+\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=a\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right).$

Vậy $\quad S_{MNPQ}=\left[a\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)\right]^2=3a^2\left(2-\sqrt{3}\right)^2.$

78. (h.214)

a) Dễ thấy $BC=\frac{10a}{\sqrt{3}}.$

$$SA^2=SO^2+AO^2$$
$$=4a^2+a^2=5a^2.$$
$$SC^2=SO^2+OH^2+HC^2$$
$$=4a^2+16a^2+\frac{25a^2}{3}$$
$$=\frac{85a^2}{3}.$$
$$AC^2=\frac{100a^2}{3}.$$



Hình 214

Ta có

$$SA^2+SC^2=AC^2.$$

Vậy $\quad SA\perp SC.$

+ Kẻ AD song song và bằng BC (hai tia AD, BC cùng chiều) thì góc giữa AB và SC chính là góc giữa CD và SC, đó là $\widehat{SCD}$ hoặc $180^{\circ}-\widehat{SCD}$.

Dễ thấy $SA\perp BC$, do $AD \parallel BC$ nên $SA\perp AD$, tức là tam giác SAD vuông.

Do đó $SD^2 = SA^2 + AD^2 = 5a^2 + \dfrac{100a^2}{3} = \dfrac{115a^2}{3}$,

mặt khác $SD^2 = SC^2 + DC^2 - 2SC.DC\cos\widehat{SCD}$

nên ta có $\dfrac{115a^2}{3} = \dfrac{85a^2}{3} + \dfrac{100a^2}{3} - 2\cdot\dfrac{a\sqrt{85}}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{10a}{\sqrt{3}}\cos\widehat{SCD}$

$$\Rightarrow \qquad \cos\widehat{SCD} = \frac{7}{2\sqrt{85}}.$$

Vậy góc giữa AB và SC là α mà

$$\cos\alpha = \frac{7}{2\sqrt{85}}.$$

b) Do $(\alpha) \perp AH$, $SO \perp AH$ và $BC \perp AH$ nên SO và BC cùng song song với (α). Khi đó $(\alpha) \cap (ABC) = MN$, MN qua I và $MN \parallel BC$

$(\alpha) \cap (SOH) = IJ$, $IJ \parallel SO$

$(\alpha) \cap (SBC) = PQ$, PQ qua J và $PQ \parallel BC$.

Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang cân với chiều cao JI.

Ta có $IJ = \dfrac{1}{2}SO = a$.

$PQ = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{5a}{\sqrt{3}}$.

$\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{3a}{5a} \Rightarrow MN = \dfrac{10a.3}{\sqrt{3}.5} = 2a\sqrt{3}$.

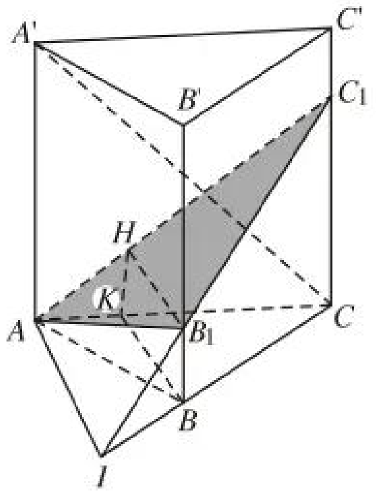
Suy ra $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(MN + PQ).IJ$

$$= \frac{1}{2}\left(2a\sqrt{3} + \frac{5a}{\sqrt{3}}\right).a = \frac{11a^2}{2\sqrt{3}}.$$

79. (h.215)

a) (P) cắt $(ACC'A')$ theo giao tuyến đi qua A và vuông góc với $A'C$.

Do $AA' = h > AC = \sqrt{a^2 + c^2}$ nên giao tuyến đó cắt CC' tại C_1, C_1 thuộc cạnh CC'. Mặt khác (P) cắt (ABC) theo giao tuyến



Hình 215

vuông góc với $A'C$, tức là giao tuyến đó vuông góc với AC, giao tuyến này cắt BC tại I. Khi đó IC_1 cắt BB' tại B_1. Thiết diện là tam giác AB_1C_1.

b) Tính diện tích thiết diện

Dễ thấy $\varphi = \widehat{CAC_1}$ là góc giữa (P) và (ABC), ngoài ra $\widehat{C_1AC} = \widehat{AA'C}$,

$$\cos\varphi = \frac{h}{\sqrt{a^2 + c^2 + h^2}}.$$

Ta có $$S_{ABC} = S_{AB_1C_1}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad S_{AB_1C_1} = \frac{S_{ABC}}{\cos\varphi} = \frac{ac}{2h}\sqrt{a^2 + c^2 + h^2}.$$

Chú ý. Có thể tính $S_{AB_1C_1}$ bằng cách tính AC_1 và đường cao B_1H của tam giác đó. Dễ thấy B_1H song song với BK, trong đó $BK \perp AC$ vì B_1H và BK cùng vuông góc với $(ACC'A')$.

Ngoài ra $B_1H = BK = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$

$$\Delta AA'C \backsim \Delta ACC_1 \Rightarrow AC_1 = \frac{A'C.AC}{AA'} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2 + h^2}.\sqrt{a^2 + c^2}}{h}.$$

Từ đó, tính được diện tích tam giác AB_1C_1.

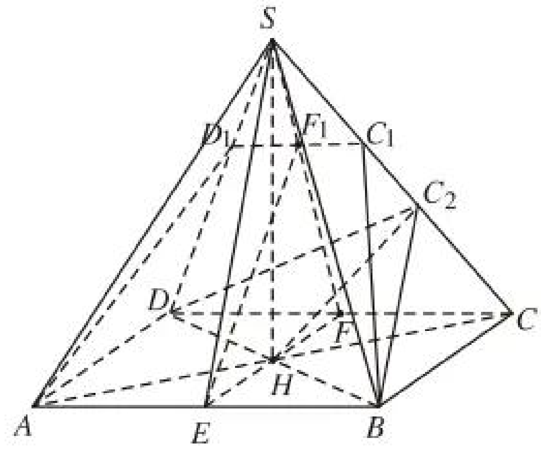
80. (h.216)

a) • Gọi E là trung điểm của AB và H là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi ấy SHE là tam giác vuông tại H và $AB \perp (SHE)$. Vậy góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là $\widehat{SEH}$.

Đặt $\widehat{SEH} = \alpha$ thì $\tan\alpha = \dfrac{2h}{a}$ $(SH = h)$.

Tương tự như trên ta có góc giữa các mặt phẳng chứa mỗi mặt bên còn lại của hình chóp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ cũng bằng α và $\tan\alpha = \dfrac{2h}{a}$.

• Khi $h = a$ thì góc tạo bởi mỗi mặt phẳng chứa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng α và $\tan\alpha = 2$.



Hình 216

Kẻ $HC_2 \perp SC$ thì ta có mp$(BC_2D) \perp SC$.

Vậy góc giữa mp(SBC) và mp(SDC) bằng $\widehat{BC_2D}$ hoặc $180^{\circ} - \widehat{BC_2D}$.

Ta tính $\widehat{BC_2D}$.

Dễ thấy
$$HC_2 = \frac{HC.HS}{SC}$$
$$= \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{\sqrt{\frac{2a^2}{4} + a^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Từ đó
$$BC_2^2 = HB^2 + HC_2^2$$
$$= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{3} = \frac{5a^2}{6}.$$

Đặt $\beta = \widehat{BC_2D}$ thì
$$BD^2 = BC_2^2 + DC_2^2 - 2BC_2.DC_2\cos\beta$$
$$\Leftrightarrow \quad 2a^2 = \frac{5a^2}{6} + \frac{5a^2}{6} - 2.\frac{5a^2}{6}\cos\beta = 2.\frac{5a^2}{6}(1 - \cos\beta)$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{5}{6}(1 - \cos\beta) \Rightarrow \cos\beta = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}.$$

Vậy góc giữa mp(SBC) và mp(SCD) là $180^{\circ} - \beta$ mà $\cos\beta = -\frac{1}{5}$.

Tương tự như trên, ta có góc giữa hai mặt chứa hai mặt bên liên tiếp cũng được xác định bởi β mà $\cos\beta = -\frac{1}{5}$.

b) Vì (P) đi qua A và song song với CD nên (P) chứa cạnh AB. Do (P) vuông góc với (SCD) nên (P) chứa EF_1 vuông góc với mặt phẳng (SCD). Dễ thấy F_1 thuộc SF, trong đó F là trung điểm của CD.

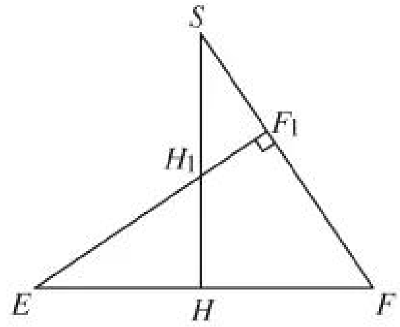
Mặt khác (P) chia tam giác SCD thành hai phần mà tỉ số diện tích hai phần bằng $\frac{1}{8}$ nên $\frac{SF_1}{SF} = \frac{1}{3}$.

Khi ấy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) là hình thang cân ABC_1D_1 mà $C_1D_1 = \frac{1}{3}\ CD = \frac{a}{3}$ với đường cao EF_1.

Ta có $S_{ABC_1D_1} = \frac{1}{2}(AB + C_1D_1).EF_1$

$$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{3}\right)EF_1 = \frac{2a}{3}.EF_1.$$

Ta tính EF_1 (h.217)



Hình 217

Vì $SH_1 . SH = SF_1 . SF = \frac{1}{3}SF^2$

nên $\frac{SH_1}{SH} = \frac{1}{3} \cdot \frac{SF^2}{SH^2}$.

Mặt khác $HE = HF$, $SF_1 = \frac{1}{2}F_1F$

nên dễ thấy $\frac{SH_1}{SH} = \frac{1}{2}$,

từ đó $\frac{SH^2}{SF^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SH}{SF} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ta lại có $\frac{SH}{SF} = \sin\widehat{SFH} = \frac{EF_1}{EF} = \frac{EF_1}{a}$.

Vậy $EF_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Từ đó $S_{ABC_1D_1} = \frac{2a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2a^2\sqrt{6}}{9}$.

81. (h.218)

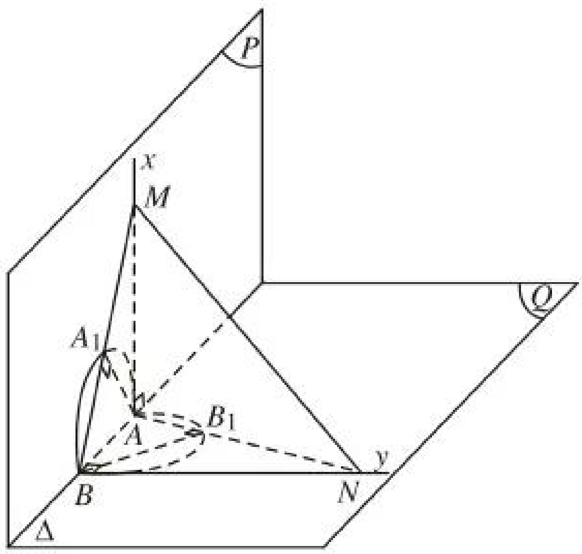
a) Vì $(P) \perp (Q)$, $(P) \cap (Q) = AB$, $M \in (P)$, $MA \perp AB$ nên $MA \perp (Q)$. Do đó MAB, MAN là các tam giác vuông tại A.

Tương tự như trên, các tam giác MBN, ABN vuông tại B.

b) Vì $MN^2 = MA^2 + AB^2 + BN^2$

$$= m^2 + 2a^2 + \frac{a^4}{m^2}.$$

Từ đó MN có độ dài bé nhất khi và chỉ khi $m^2 + \frac{a^4}{m^2}$ bé nhất.



Hình 218

Mặt khác $m^2.\dfrac{a^4}{m^2} = a^4$.

Vậy MN có độ dài bé nhất khi và chỉ khi

$$m^2 = \frac{a^4}{m^2} \Leftrightarrow m = a.$$

c) Vì $(MAB) \perp (NMB)$ nên khi kẻ AA_1 vuông góc với BM tại A_1 thì $AA_1 \perp (BMN)$, tức A_1 là chân đường cao của tứ diện $ABMN$ kẻ từ đỉnh A.

Như vậy A_1 thuộc (P) và $\widehat{BA_1A} = 90^\circ$, từ đó A_1 thuộc đường tròn đường kính AB trong (P). Đường tròn này cố định.

Tương tự như trên, chân đường cao B_1 kẻ từ đỉnh B của tứ diện $ABMN$ cũng thuộc đường tròn đường kính AB nằm trong mặt phẳng (Q).

82. (h.219)

a) Kẻ $MH \perp AD$ thì

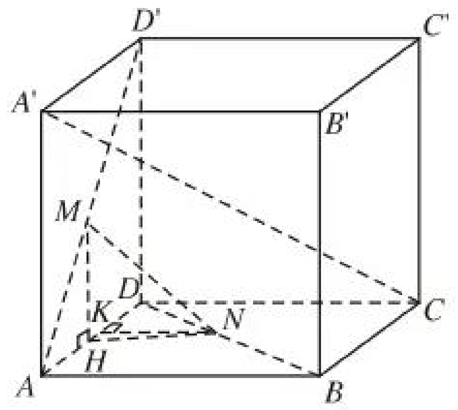
$MH \perp (ABCD)$ và $MH = \dfrac{x\sqrt{2}}{2} = AH$.

Kẻ $NK \perp AD$ thì

$$NK = \frac{x\sqrt{2}}{2} = DK.$$

Vậy $KH = a - x\sqrt{2}$.

Ta có



Hình 219

$$MN^2 = MH^2 + HK^2 + KN^2 = 3x^2 - 2a\sqrt{2}x + a^2.$$

Từ đó MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

b) Khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì

$$MN^2 = \frac{3a^2}{9} = \frac{a^2}{3};$$

$$AM^2 = \frac{2a^2}{9};$$

$$AN^2 = AD^2 + DN^2 - 2AD.DN\cos 45^\circ = \frac{5a^2}{9}.$$

Từ đó $\quad AN^2 = AM^2 + MN^2$ hay $MN \perp AD'$.

Chứng minh tương tự như trên, ta cũng có $MN \perp BD$.

Vậy MN là đường vuông góc chung của AD' và BD.

Khi $DN = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì

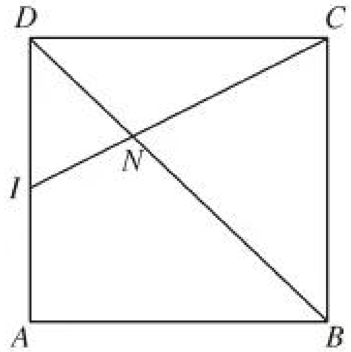
$NB = 2ND$.

Gọi I là trung điểm của AD thì ta có I, N, C thẳng hàng (h.220). Tương tự ta cũng có các điểm I, M, A' thẳng hàng.

Xét tam giác $A'IC$ ta có

$$\frac{IN}{NC} = \frac{IM}{MA'} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\quad MN \,//\, A'C$.



Hình 220

83. (h.221)

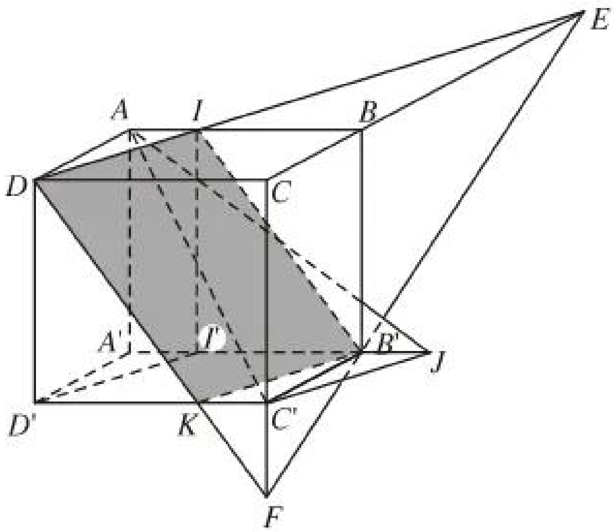
a) *Cách 1.*

Đặt α là góc giữa DI và AC' thì

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{AC'}\right|}{\left|\overrightarrow{DI}\right|.\left|\overrightarrow{AC'}\right|}.$$

$$= \frac{(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'})}{\left|\overrightarrow{DI}\right|.\left|\overrightarrow{AC'}\right|}$$

$$= \frac{\left|-a^2 + xa\right|}{\sqrt{a^2 + x^2}.a\sqrt{3}} = \frac{\left|-a + x\right|}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2 + x^2}}.$$



Hình 221

Khi ấy $\alpha = 60^{\circ}$ khi và chỉ khi

$$\frac{\left|-a + x\right|}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \quad x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = a(4 - \sqrt{15}) \text{ (vì } 0 < x < a).$$

Hệ thức trên xác định vị trí điểm I.

Cách 2.

Kẻ $II' \,//\, AA'$ ($I' \in A'B'$), $C'J \,//\, D'I'$ (I' thuộc đường thẳng $A'B'$) thì $\widehat{AC'J}$ hoặc $180^o - \widehat{AC'J}$ là góc giữa hai đường thẳng AC' và DI với $B'J = x$.

Do giả thiết góc giữa hai đường thẳng AC' và DI bằng 60^o nên $\widehat{AC'J} = 60^o$ hoặc 120^o.

Ta có $\quad AJ^2 = AA'^2 + A'J^2 = a^2 + (a+x)^2$

$$AC'^2 = 3a^2,\ C'J^2 = a^2 + x^2.$$

– Trường hợp $\widehat{AC'J} = 60^o$, ta có

$$AJ^2 = AC'^2 + C'J^2 - 2AC'.C'J.\frac{1}{2}$$

hay $\quad a^2 + (a+x)^2 = 3a^2 + a^2 + x^2 - 2a\sqrt{3}.\sqrt{a^2 + x^2}.\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = (4 - \sqrt{15})a \text{ (vì } 0 < x < a).$$

– Trường hợp $\widehat{AC'J} = 120^o$, ta có

$$a^2 + (a+x)^2 = 3a^2 + a^2 + x^2 + 2a\sqrt{3}.\sqrt{a^2 + x^2}.\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2ax = 2a^2 + a\sqrt{3}.\sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(x - a) = \sqrt{3}.\sqrt{a^2 + x^2}\ .$$

Điều này không xảy ra vì $0 < x < a$.

Vậy khi $x = (4 - \sqrt{15})a$ thì góc giữa DI và AC' bằng 60^o.

b) Gọi $\quad E = DI \cap CB$

$$F = B'E \cap CC'$$

$$K = DF \cap D'C'$$

thì thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mp($B'DI$) là tứ giác $DIB'K$. Dễ thấy đó là hình bình hành.

$$S_{DIB'K} = 2S_{B'ID} = 2.\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{IB'}^2.\overrightarrow{ID}^2 - (\overrightarrow{IB'}.\overrightarrow{ID})^2}.$$

Mặt khác $\quad \overrightarrow{ID}^2.\overrightarrow{IB'}^2 = (a^2 + x^2)[a^2 + (a-x)^2]$

và $\quad (\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IB'})^2 = [(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BB'})]^2$

$$= (\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB})^2 = [-x(a-x)]^2 = x^2(a-x)^2.$$

Từ đó $\quad S_{DIB'K} = \sqrt{a^4 + a^2x^2 + a^2(a-x)^2}$

$$= a\sqrt{a^2 + x^2 + (a-x)^2}\ .$$

Dễ thấy $S_{DIB'K}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \dfrac{a}{2} \cdot$

c) Gọi h là khoảng cách từ C đến mp($B'ID$), do tứ diện $CDEF$ có CD, CE, CF đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CF^2} \cdot$$

Mặt khác do AD // BE nên $\dfrac{a}{BE} = \dfrac{x}{a-x}$,

từ đó $\quad BE = \dfrac{a(a-x)}{x}$

và $\quad CE = a + \dfrac{a(a-x)}{x} = \dfrac{a^2}{x} \cdot$

Tương tự như trên, ta có $C'F = \dfrac{ax}{a-x}$, từ đó

$$CF = a + \frac{ax}{a-x} = \frac{a^2}{a-x} \cdot$$

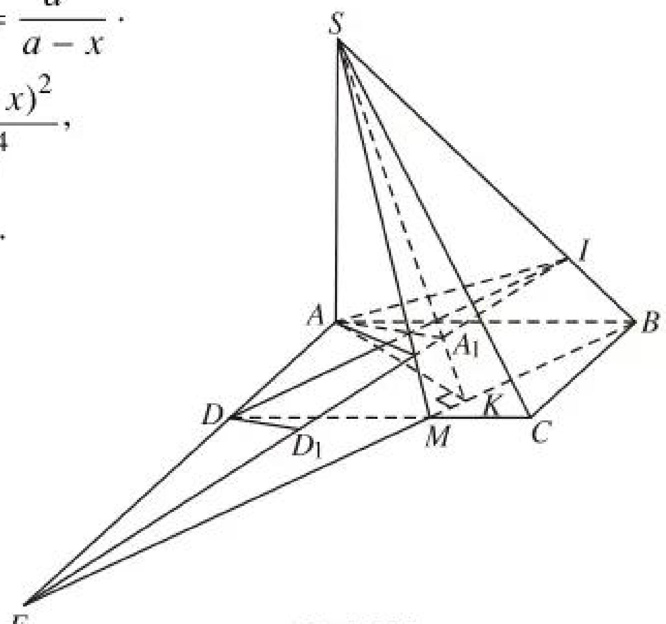
Như vậy $\quad \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{(a-x)^2}{a^4}$,

do vậy $h = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2 + (a-x)^2}} \cdot$

84. (h.222)

a) Kẻ $AK \perp MB$, do $SA \perp (ABC)$ nên $SK \perp MB$ (định lí ba đường vuông góc).

Vậy $S_{SBM} = \dfrac{1}{2}BM.SK$.



Hình 222

Mặt khác $\quad BM = \sqrt{b^2 + x^2}$ và $AK \,.\, MB = 2S_{AMB} = ab$

tức là $\quad AK = \dfrac{ab}{\sqrt{b^2 + x^2}}$.

Từ đó $\quad SK^2 = SA^2 + AK^2 = h^2 + \dfrac{a^2b^2}{b^2 + x^2}$

$$= \frac{a^2b^2 + b^2h^2 + h^2x^2}{b^2 + x^2}.$$

Vậy $\quad S_{SBM} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2h^2 + h^2x^2}$.

b) Với A_1 là hình chiếu của A trên SK, dễ thấy $AA_1 \perp (SBM)$.

Từ đó $\quad AA_1 \,.\, SK = SA \,.\, AK$,

suy ra $\quad AA_1 = \dfrac{SA.AK}{SK}$

hay $$AA_1 = \frac{h.\dfrac{ab}{\sqrt{b^2 + x^2}}}{\dfrac{\sqrt{a^2b^2 + b^2h^2 + h^2x^2}}{\sqrt{b^2 + x^2}}} = \frac{abh}{\sqrt{a^2b^2 + b^2h^2 + h^2x^2}}.$$

Khi M là trung điểm DC thì $x = \dfrac{a}{2}$ nên

$$AA_1 = \frac{2abh}{\sqrt{4a^2b^2 + 4b^2h^2 + a^2h^2}}.$$

c) Vì $AA_1 \perp (SMB)$ nên $AA_1 \perp SB$, mặt khác $AD \perp SB$, từ đó mp$(ADA_1) \perp SB$.

Gọi giao điểm của SB với mp(ADA_1) là I thì $AI \perp SB$, từ đó I là điểm cố định và mp(ADA_1) cố định.

Như vậy, điểm A_1 nhìn AI cố định dưới góc vuông và A_1 thuộc mặt phẳng cố định (ADI), tức là A_1 thuộc đường tròn đường kính AI trong mp(ADI).

Bán kính của đường tròn đó bằng $\dfrac{AI}{2}$ mà

$$AI \,.\, SB = SA \,.\, AB$$

hay $$AI = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}} \cdot$$

Vậy bán kính của đường tròn trên bằng $\dfrac{ah}{2\sqrt{a^2 + h^2}} \cdot$

Vì D_1 là hình chiếu của điểm D trên mp(SBM) nên $DD_1 \,//\, AA_1$ và dễ thấy D_1 thuộc đường thẳng A_1I.

Như vậy, D_1 thuộc mp(ADI) và D_1 nhìn DI dưới góc vuông, tức là điểm D_1 thuộc đường tròn đường kính DI trong mp(ADI). Bán kính của đường tròn đó bằng $\dfrac{DI}{2} \cdot$

Mặt khác $$DI^2 = DA^2 + AI^2 = b^2 + \frac{a^2h^2}{a^2 + h^2}$$

$$= \frac{a^2b^2 + b^2h^2 + a^2h^2}{a^2 + h^2} \cdot$$

Từ đó, bán kính của đường tròn đó là

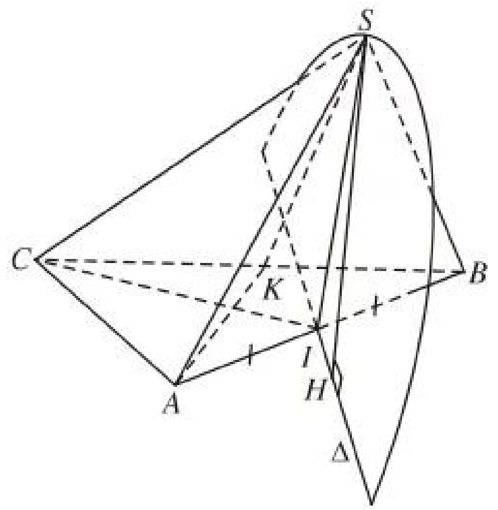
$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2h^2 + b^2h^2}{a^2 + h^2}} \cdot$$

85. (h.223)

a) Vì $AB = a$, $SA = a$, $\widehat{SAB} = 60^\circ$ nên SAB là tam giác đều, từ đó điểm S thuộc mặt phẳng trung trực (α) của AB và mặt phẳng (α) cố định, ngoài ra $(\alpha) \perp (ABC)$. Kí hiệu $\Delta = (\alpha) \cap (ABC)$ thì Δ cố định.

Do H là hình chiếu của S trên (ABC) nên H thuộc Δ.

Vậy hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) thuộc đường thẳng Δ cố định nói trên.



Hình 223

Gọi I là trung điểm của AB ta có $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, như vậy, điểm S thuộc đường tròn tâm I, bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ trong mặt phẳng (α) nói trên, tức là điểm S thuộc đường tròn cố định.

b) Ta có $SH \le SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Như vậy giá trị lớn nhất của SH bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ khi H trùng với điểm I.

Do $SI \subset (SAB)$ và $I \equiv H$, $SH \perp (ABC)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$ khi SH đạt giá trị lớn nhất.

Khi đó $$SC^2 = CI^2 + SI^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + CI^2.$$

Mặt khác $$CI^2 = CA^2 + AI^2 - 2AC.AI.\cos 120^\circ$$
$$= a^2 + \frac{a^2}{4} + 2a.\frac{a}{2}.\frac{1}{2} = \frac{7a^2}{4}.$$

Từ đó $$SC^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{7a^2}{4} = \frac{10a^2}{4}$$

hay $$SC = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

c) – Khi SBC là tam giác vuông tại điểm S thì hình chiếu của điểm A trên mp(SBC) là trung điểm K của BC.

Thật vậy, ta có $AS = AC = AB$ nên $KS = KC = KB$.

Do đó, AK là khoảng cách từ điểm A đến mp(SBC).

Dễ thấy $AK = AC\cos 60^\circ = \frac{a}{2}$.

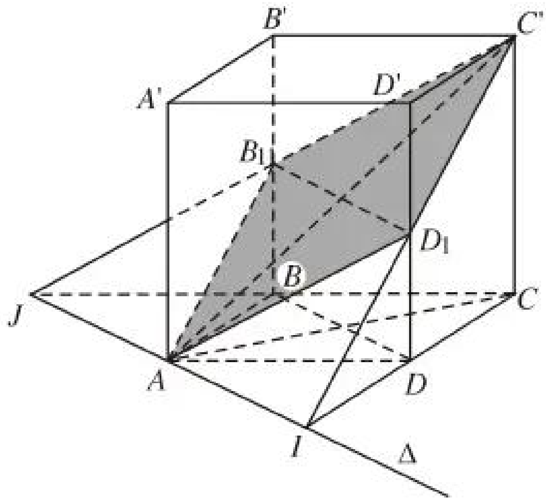
– Vì $BC = a\sqrt{3}$, $SB = a$ nên $SC = a\sqrt{2}$.

Mặt khác $SA = AC = a$ nên $SC^2 = AS^2 + AC^2$, tức là $\widehat{SAC} = 90^\circ$.

Như vậy, góc giữa hai đường thẳng SA và AC bằng 90°.

86. (h.224)

a) Gọi $I = CD \cap \Delta$, $J = BC \cap \Delta$, $B_1 = C'J \cap BB'$, $D_1 = C'I \cap DD'$ thì thiết diện thu được là $AB_1C'D_1$.



Hình 224

Dễ thấy $AB_1C'D_1$ là hình bình hành và B_1, D_1 lần lượt là trung điểm của BB', DD'.

Từ đó $AD_1 = D_1C'$.

Do đó thiết diện $AB_1C'D_1$ là hình thoi.

$$S_{AB_1C'D_1} = \frac{1}{2}B_1D_1.AC',$$

$$B_1D_1 = BD = a\sqrt{2},$$

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = 2a^2 + 6a^2 = 8a^2 \Rightarrow AC' = 2a\sqrt{2}.$$

Vậy $S_{AB_1C'D_1} = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.2a\sqrt{2} = 2a^2$.

b) Ta có $AC \perp BD$ mà $\Delta \,//\, BD$ nên $AC \perp \Delta$.

Mặt khác $C'C \perp (ABCD)$ nên $AC' \perp \Delta$ (định lí ba đường vuông góc).

Vậy $\widehat{C'AC}$ là góc giữa mp(P) và mp($ABCD$).

Ta có $\tan\widehat{C'AC} = \dfrac{CC'}{AC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, từ đó $\widehat{C'AC} = 60^\circ$.

Chú ý. Cũng có thể tính góc giữa mp(P) và mp($ABCD$) bởi công thức

$$S_{ABCD} = S_{AB_1C'D_1}\cos\varphi$$

mà $$S_{ABCD} = a^2,\ S_{AB_1C'D_1} = 2a^2,$$

tức là $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$ hay $\varphi = 60^\circ$.

87. (h.225)

a) Vì $BC \parallel (SAD)$

$M \in mp(SAD) \cap mp(MBC)$

nên $mp(MBC) \cap (SAD) = MN$

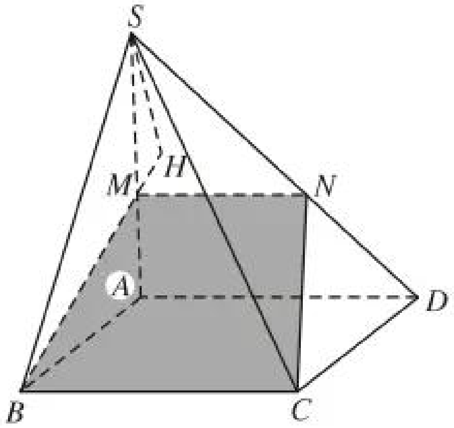
mà $MN \parallel BC$ ($N \in SD$).

Như vậy $BMNC$ là hình thang.

Mặt khác $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp BM$.

Vậy $BMNC$ là hình thang vuông.

Do đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mp(MBC) nói chung là hình thang vuông.



Hình 225

Khi $x = 0$ thì thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$, và khi $x = 2a$ thì thiết diện là tam giác SBC.

Ta có $$S_{BMNC} = \frac{1}{2}(BC + MN).BM$$

$$BM^2 = a^2 + x^2 \text{ hay } BM = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{2a - x}{2a}, \text{ từ đó } MN = b.\frac{2a - x}{2a}.$$

Từ đó $$S_{BMNC} = \frac{1}{2}\left(b + b.\frac{2a - x}{2a}\right).\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{b}{4a}(4a - x)\sqrt{a^2 + x^2}.$$

b) Do $(BMNC) \perp (SAB)$ nên khi kẻ SH vuông góc với đường thẳng BM ($H \in BM$) thì $SH \perp (BMNC)$.

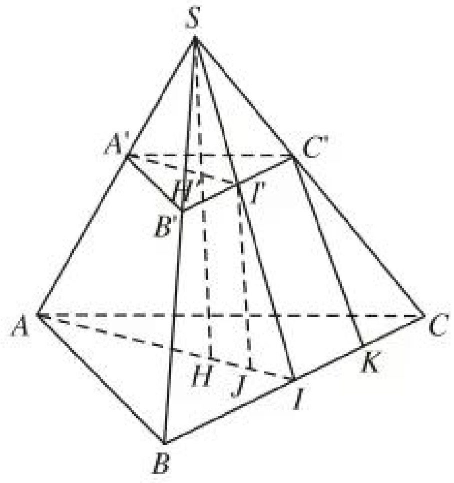
Khoảng cách từ S đến mp(BCM) là SH. Dễ thấy

$$SH.BM = 2S_{SBM} = 2.\frac{1}{2}a(2a - x).$$

Vậy $$SH = \frac{a(2a - x)}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

88. (h.226)

a) Gọi S là đỉnh của hình chóp đều sinh ra hình chóp cụt đều $A'B'C'.ABC$; các điểm H, H' lần lượt là tâm hai đáy của hình chóp cụt đều ; I là trung điểm của BC. Dễ thấy $\widehat{HSI} = \alpha$, từ đó $\widehat{SIH} = 90^o - \alpha = \beta$.



Hình 226

Ta có $HH' = I'J = JI.\tan\beta = JI.\cot\alpha$.

Mà $JI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} - \dfrac{b\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}(a-b)$.

Vậy $HH' = \dfrac{\sqrt{3}}{6}(a-b)\cot\alpha$,

$$II' = \frac{JI}{\cos\beta} = \frac{JI}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}(a-b)}{6\sin\alpha}$$

$$CC'^2 = C'K^2 + KC^2 = \left(\frac{\sqrt{3}(a-b)}{6\sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

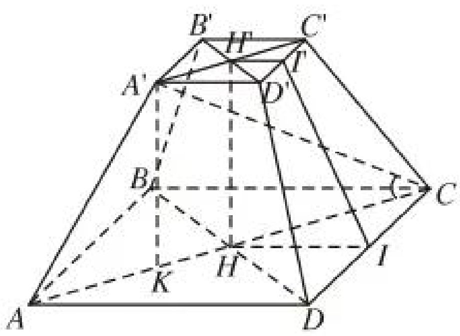
$$\Rightarrow CC' = \frac{a-b}{2\sqrt{3}\sin\alpha}\sqrt{1+3\sin^2\alpha}.$$

b) $$S_{xq} = 3.\frac{1}{2}(B'C' + BC).II' = \frac{3}{2}(a+b)\frac{\sqrt{3}(a-b)}{6\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{4\sin\alpha}(a^2-b^2)$$

$$S_{tp} = \frac{\sqrt{3}}{4\sin\alpha}(a^2-b^2) + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a^2-b^2}{\sin\alpha} + a^2 + b^2\right).$$

89. (h.227)

Gọi H, H' lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD$, $A'B'C'D'$. I, I' lần lượt là trung điểm của CD, $C'D'$ thì $HH' = h$; $\widehat{A'CA} = \beta$; $\widehat{I'IH} = \alpha$.



Hình 227

a) Dễ thấy $II' = \dfrac{h}{\sin\alpha}$.

Kí hiệu độ dài cạnh của các đáy $ABCD$, $A'B'C'D'$ lần lượt là x, y ($x > y$).

Ta có $\dfrac{x-y}{2} = h\cot\alpha$

$$\Leftrightarrow x - y = 2h\cot\alpha. \qquad (1)$$

Kẻ $A'K$ // HH' thì $A'K = HH' = h$ và

$KC = A'K\cot\beta = h\cot\beta$ hay $x\sqrt{2} - \dfrac{x\sqrt{2} - y\sqrt{2}}{2} = h\cot\beta.$

Từ đó $\dfrac{(x+y)\sqrt{2}}{2} = h\cot\beta$

$$\Leftrightarrow x + y = \sqrt{2}h\cot\beta \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $x = \dfrac{h}{2}(\sqrt{2}\cot\beta + 2\cot\alpha)$

$y = \dfrac{h}{2}(\sqrt{2}\cot\beta - 2\cot\alpha)$ (điều kiện $\sqrt{2}\cot\beta - 2\cot\alpha > 0$).

b) $S_{xq} = 4.\dfrac{1}{2}(x+y)II' = 2\sqrt{2}h\cot\beta.\dfrac{h}{\sin\alpha}$

$$= \frac{2\sqrt{2}h^2\cot\beta}{\sin\alpha}.$$