



Bài tập ôn tập chương III

71. Cho M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, A_1D_1 của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.
- Xác định giao điểm P và Q của mặt phẳng (CMN) với các đường thẳng B_1C_1 và DB_1 .
 - Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trong đó $\vec{b} = \overrightarrow{AB}, \vec{c} = \overrightarrow{AD}, \vec{a} = \overrightarrow{AA_1}$.
72. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc các cạnh bên AA', BB', CC' sao cho $\frac{AA_1}{AA'} = \frac{B'B_1}{BB'} = \frac{C'C_1}{CC'} = \frac{3}{4}$. Trên các đoạn thẳng CA_1 và $A'B_1$ lần lượt lấy các điểm I, J sao cho $IJ // B'C_1$. Tính tỉ số $\frac{IJ}{B'C_1}$.
73. Cho M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD của tứ diện $ABCD$; P là điểm thuộc đường thẳng AD sao cho $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$, k là số cho trước ($k \neq 1$). Xác định điểm Q thuộc đường thẳng BC sao cho PQ và MN cắt nhau. Khi đó, hãy tính tỉ số $\frac{QB}{QC}$.
74. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{A_1A} = k\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{B_1B} = k\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{C_1C} = k\overrightarrow{C_1D}, \overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{D_1A}$. Với giá trị nào của k thì bốn điểm A_1, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt phẳng?
75. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng :
- Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật thì với mọi điểm M trong không gian ta luôn có $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.
 - Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M trong không gian. Điều ngược lại có đúng không?
76. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân với các cạnh đáy $AB = 2a, CD = a$ và hai cạnh bên $BC = AD = a, SO$ vuông góc với $mp(ABC)$ trong đó O là trung điểm của $AB, SO = a$.

- a) Chứng minh rằng điểm cách đều các điểm S, A, B, C, D thuộc đường thẳng SO . Tính khoảng cách từ điểm đó đến mỗi đỉnh của hình chóp.
- b) Tính góc giữa đường thẳng SO và $mp(SCD)$.
77. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, $SA = SB = SC = a$ và cùng tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60° . Một mặt phẳng song song với hai cạnh chéo nhau của hình chóp và cắt hình chóp đó theo thiết diện là hình vuông. Tính diện tích thiết diện.
78. Cho tam giác đều ABC có chiều cao $AH = 5a$. Điểm O thuộc đoạn thẳng AH sao cho $AO = a$. Điểm S trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O và $SO = 2a$.
- a) Chứng minh AS và CS vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC .
- b) Gọi I là trung điểm của OH ; (α) là mặt phẳng đi qua điểm I và vuông góc với AH . Thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi (α) là hình gì? Tính diện tích thiết diện.
79. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B . $AB = c$, $BC = a$, cạnh bên $AA' = h$, trong đó $h^2 > a^2 + c^2$. Một mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với CA' .
- a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ khi cắt bởi $mp(P)$.
- b) Tính diện tích thiết diện.
80. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a .
- a) Tính góc tạo bởi mặt phẳng chứa mặt bên và mặt đáy. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng chứa hai mặt bên liên tiếp nếu chiều cao hình chóp bằng a .
- b) Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm A , song song với CD và vuông góc với $mp(SCD)$, chia tam giác SCD thành hai phần với tỉ số diện tích bằng $\frac{1}{8}$ (phần thứ nhất chứa đỉnh). Tính diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) .
81. Cho hai nửa mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến Δ . Trên Δ lấy hai điểm A, B cố định với $AB = a\sqrt{2}$ (a là độ dài cho trước). Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với Δ và ở trong (P) lấy điểm M khác A . Đặt $AM = m$. Trên nửa đường thẳng By vuông góc với Δ và trong (Q) lấy điểm N sao cho $BN = \frac{a^2}{m}$.

- a) Chứng minh các mặt của tứ diện $ABMN$ là các tam giác vuông.
 b) Với giá trị nào của m thì MN có độ dài bé nhất? Tính giá trị đó.
 c) Chứng minh rằng chân mỗi đường cao của tứ diện đó xuất phát từ A và B nằm trên đường tròn cố định khi M thay đổi.

82. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng AD' , điểm N thuộc đoạn thẳng BD sao cho

$$AM = DN = x \quad (0 < x < a\sqrt{2}).$$

- a) Tìm x để đoạn thẳng MN có độ dài ngắn nhất.
 b) Khi MN ngắn nhất, hãy chứng tỏ MN là đường vuông góc chung của AD' và DB , đồng thời $MN // A'C$.

83. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi I là điểm thuộc cạnh AB ; đặt $AI = x$ ($0 < x < a$).

- a) Khi góc giữa hai đường thẳng AC' và DI bằng 60° , hãy xác định vị trí của điểm I .
 b) Tính theo a và x diện tích thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng $(B'DI)$. Tìm x để diện tích ấy là nhỏ nhất.
 c) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(B'DI)$ theo a và x .

84. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = b$. Gọi S là điểm sao cho SA vuông góc với $\text{mp}(ABC)$ và $SA = h$ ($h > 0$). Trên cạnh CD lấy điểm M bất kì, đặt $CM = x$, ($0 \leq x \leq a$).

- a) Tính diện tích tam giác SBM theo a , b , h , x .
 b) Tính khoảng cách từ điểm A đến $\text{mp}(SBM)$ khi M là trung điểm của CD .
 c) Gọi hình chiếu của điểm A và điểm D trên $\text{mp}(SBM)$ lần lượt là A_1 và D_1 . Chứng minh rằng khi M thay đổi trên CD thì các điểm A_1 và D_1 mỗi điểm thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của mỗi đường tròn đó.

85. Cho ABC là tam giác cân có $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Điểm S thay đổi trong không gian nhưng luôn ở về một phía của mặt phẳng (ABC) và $AS = a$, $\widehat{SAB} = 60^\circ$.

- a) Gọi H là hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC) . Chứng minh rằng H thuộc đường thẳng cố định và S thuộc đường tròn cố định, tính bán kính đường tròn đó.
 b) Chứng minh rằng khi độ dài SH đạt giá trị lớn nhất thì hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) vuông góc với nhau và khi đó hãy tính độ dài SC .

c) Khi SBC là tam giác vuông tại S , hãy tính góc giữa hai đường thẳng SA với AC và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

86. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{6}$. Xét đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với BD . Gọi (P) là mặt phẳng qua Δ và điểm C' .
- Thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi $mp(P)$ là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.
 - Tính góc giữa $mp(P)$ và $mp(ABCD)$.
87. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = b$; cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AS = 2a$. Gọi M là điểm bất kì trên AS , đặt $AM = x$ ($0 \leq x \leq 2a$).
- Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi $mp(MBC)$ là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.
 - Tính khoảng cách từ điểm S đến $mp(MBC)$ ứng với mỗi vị trí của M .
88. Cho hình chóp cùt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đáy lần lượt là a, b ($a > b$). Góc giữa đường thẳng chứa đường cao và mặt phẳng chứa mặt bên là α . Tính :
- Chiều cao, trung đoạn, cạnh bên của hình chóp cùt đó (đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đáy thuộc một mặt bên gọi là *trung đoạn* của hình chóp cùt đều) ;
 - Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình chóp cùt đó.
89. Cho hình chóp cùt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đường cao bằng h . Góc giữa mặt phẳng chứa mặt bên và mặt đáy bằng α . Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng β . Tính :
- Cạnh đáy, trung đoạn của hình chóp cùt ;
 - Diện tích xung quanh của hình chóp cùt đó.